統計数理 第33巻 第1号（1985）

統計数理研究所研究活動

1984年度研究発表会要旨

と　き：1985年3月20日，午前9時30分～午後5時
ところ：統計数理研究所　講堂

あいさつ　　　　　　　　　　　　　　所長　林　知己夫

第1研究部

パレート分布とベータ分布について

清　水　良　一

高橋幸雄氏が bit, Vol. 15, no. 8 (1983) で，大きなプログラムに含まれるバグの数の推定問題を論じている．あるひとつのバグが t 回までの演算実行で発見される確率 $F(t)$ を求めることが問題である．$\bar{F}(x)=1-F(x)$ とおく．

彼は適当なモデルを使って，関数方程式

$$\bar{F}(x+\tau)=\bar{F}(\tau)\cdot\bar{F}(c(\tau)\cdot x),\ x>0,\ \tau>0, \tag{1}$$

を導き，さらに条件，

$$\bar{F}(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dG(\lambda), \tag{2}$$

を仮定した上で，方程式(1)を解いている．解はパレート分布（第2種ベータ）である．条件(2)は，分布 F が指数分布の scale mixture であることを意味しているが，このことはまた，F が単調に減少する hazard rate をもつことを含意している．ところで，方程式(1)は，条件(2)の仮定なしに完全に解くことができる．以下，$\tau>0$ をひとつ固定し，すべての $x>0$ について方程式(1)が成り立つことを仮定する．$c(\tau)$ の値によって次の3つの場合に分れる．$\varDelta(x)$ は適当な周期関数である。

case 1.　$c(\tau)<1$.

$\bar{F}(x)=(1+bx)^{-a}\varDelta(\log(1+bx)),\ a=\log\bar{F}(\tau)/\log c(\tau),\ b=(1-c(\tau))/\tau c(\tau),$

$\varDelta(x-\log c(\tau))=\varDelta(x)$

case 2.　$c(\tau)=1$.

$\bar{F}(x)=e^{-ax}\cdot\varDelta(x),\ a=-\log\bar{F}^{1/\tau}(\tau),$

$\varDelta(x+\tau)=\varDelta(x)$.

case 3.　$c(\tau)=1$.

$\bar{F}(x)=(1-bx)^{a}\varDelta(\log(1-bx)),\ a=-\log\bar{F}(\tau)/\log c(\tau),\ b=(c(\tau)-1)/\tau c(\tau),$

$\varDelta(x+\log c(\tau))=\varDelta(x)$.

とくに，$c(\tau)$ が1より小さいか大きいかは分布 F によって決まり，τ の値に関係しない．また，$\log c(\tau_1)/\log c(\tau_2)$（case 1 と 3）あるいは $\log\tau_1/\log\tau_2$（case 2）が無理数であるような2つの τ の値 τ_1, τ_2 について，すべての x について方程式(1)が成り立つならば，$\varDelta(x)$ は恒等的に1となり，分布 F は，パレート分布（$c(\tau)<1$）か，指数分布（$c(\tau)=1$）か，または，第1種ベータ分布（$c(\tau)>1$）である．