時系列における非線形因果性のノンパラメトリック検定

川崎　能典　モデリング研究系　准教授

概要: ある時系列y_tのラグ変数が，別の時系列x_tの予測に役立つとき，y_tからx_tへの「因果性」があるとする定式化は，赤池の相対パワー寄与率やGrangerによる因果性検定の提案以来，古くから受け入れられてきた．ここでは，非線形な因果性も検出でき，局所対立仮説に対して検出力を持つ，ノンパラメトリック回帰に基づく検定を提案する．関心のある応用先は，金融時系列のように，平均構造は希薄である一方分散構造に依存性が潜んでいるかも知れないケースである．[本研究は，西山慶彦氏(京都大学経済研究所)，人見光太郎氏(京都工芸繊維大学)，Kiho Jeong氏(Kyungpook National University)との共同研究である．]

1. 問題設定と基本的着想

いま関心の中心となる時系列はx_tで，その動きを説明するのに自己ラグだけでよいか，それとも他の時系列y_tのラグ変数も取り入れてモデルを作った方がよいのかを，場合によっては高次モーメントまでを要する非線形関係も考慮した上で決めたい．x_t, y_tは強定常で，モデルのクラスは非線形ARや非線形ADLモデルを念頭に置いている．

$X_{t-1}=(x_{t-1},\ldots,x_{t-p})$, $Y_{t-1}=(y_{t-1},\ldots,y_{t-q})$と表し，更にこれらをまとめたものを$Z_{t-1}=(X_{t-1},Y_{t-1})$と記す．$x_t$の条件付き平均は$m(Z_{t-1})$という形で$Z_{t-1}$に(つまり$X_{t-1}$にも$Y_{t-1}$にも)依存しているかもしれないが，$y_t$からの因果性がなければ，$g(X_{t-1})$というタイプの関数形が適切である．時系列の因果性検定では，帰無仮説は「因果性なし」であることを踏襲して，ここでは$m(Z_{t-1})=g(X_{t-1})$を帰無仮説とする．もちろん，mやgは非線形関数であり得るのだが，それはカーネル回帰などのノンパラメトリック回帰で推定しながら検定する．

X_{t-1}だけにノンパラメトリック回帰したときの残差を$u_t = x_t - g(X_{t-1})$と書くと，$m(Z_{t-1})=g(X_{t-1})$は$\mathrm{E}(u_t|Z_{t-1})=0$と等価である．(つまり，$u_t$の中に$Z_{t-1}$で説明できる部分は残っていないから$X_{t-1}$に関するモデリングだけで十分．)この直交条件は，$X_{t-1}$で説明できない空間($s_X^{\perp}$)に入っている$z$の(任意の)関数$p(z)$に対して$\mathrm{E}(u_t p(Z_{t-1}))=0$となることと等価である．更に，後々データからの推定を安定させるために，便宜的にX_{t-1}の密度関数で重み付けをした

$$\mathrm{E}[u_t f(X_{t-1}) p(Z_{t-1})]=0 \quad \text{for} \quad \forall p(z)\in s_X^{\perp}$$

を帰無仮説とする．

2. 検定統計量の構成

「$s_X^{\perp}$の任意の関数$p(z)$」を取り扱うためには，$s_X^{\perp}$の全ての元を表現できる基本部品(基底関数)を定めなければならないので，それを$H(z)=\{h_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$と書く．(もちろん実際には有限個($k_T < T$)だけ取ってくる．)$H(z)$は以下の規格化ないし直交条件を満たすように作る．

$$\mathrm{Var}[u_t f(X_{t-1}) h_i(Z_{t-1})]=1$$

$$\mathrm{Cov}[u_t f(X_{t-1}) h_i(Z_{t-1}), u_t f(X_{t-1}) h_j(Z_{t-1})]=0 \quad \text{for} \quad \forall i\neq j$$

いま手元に標本$\{(x_t,y_t)\}_{t=1}^{T}$があるとして，$r=\max(p,q)+1$とする．ここで各$i=1,\ldots,k_T$に対し

$$a_i=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=r}^{T} u_t f(X_{t-1}) h_i(Z_{t-1}) \qquad (1)$$

を考える．このとき，マルチンゲール差分に対する中心極限定理から，$T\to\infty$のとき，帰無仮説の下では$a_i\to \mathrm{N}(0,1)$で，逆に対立仮説の下では — u_tはZ_{t-1}で表現できる非ゼロの平均を持ってしまうので — いずれかのiで$|a_i|$は発散し，consistentな検定が構成できる．

実際には，どのa_iの方向にデータが外れていくかわからないので，各a_iを統合したものを最終的な検定統計量とすればよい．ここでは，分析者が指定する絶対総和可能な重みw_i(例えば$w_i=0.9^i$)によって，

$$S_T=\sum_{i=1}^{k_T} w_i a_i^2 \to \sum_{i=1}^{k_T} w_i \epsilon_i^2 \qquad (2)$$

により検定統計量S_Tを構成する．ここでϵ_iはi.i.d.のN(0,1)確率変数であり，シミュレーションで分位点を作成して検定を実装する．

3. 標本版の構成とその性質，拡張

実際には(1),(2)の標本版$(\hat{a}_i, \hat{S}_T)$を構成しても，(2)と同じ結論が成り立つ．詳細は，紙幅の関係で参考文献(以下NHKJと略)をご覧頂きたい．以下，要点を記す．

- 標本版の具体的構成法はNHKJの2.2節参照．
- (2)が標本版でも成り立つことと，それに要する仮定については，NHKJの2.3節(Theorem 1)を参照．
- S_Tは局所対立仮説のもと自明でない検出力を持つ．NHKJの3節(Theorem 2)を参照．つまり，標本増大につれて対立仮説と帰無仮説の距離がどんどん縮まるような状況でも一定の検出力がある．
- ここまでの議論は，高次のモーメントに関する因果性検定の枠組みにも拡張可能である．NHKJの4節(Theorem 3)を参照．
- ここで提案する検定統計量はよく知られたIntegrated Conditional Moment test(ICM検定)と密接な関係にある．NHKJの5節を参照．

4. 数値実験：2次モーメントでの因果性

データ生成過程として以下を想定する．x_tをy_tに回帰しても何の因果性も検出されないが，x_tはy_t^2に依存しており，2次モーメントでは因果性がある．

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \omega+\alpha y_{t-1}^2+\beta\sigma_{t-1}^2\\
y_t &= \sigma_t\eta_t, \quad \eta_t\sim \mathrm{NID}(0,1)\\
x_t &= 0.65x_{t-1}+\sqrt{1+y_{t-1}^2}\,\epsilon_t, \quad \epsilon_t\sim \mathrm{NID}(0,1),
\end{aligned}$$

1,000回のシミュレーションに基づく検出力を下の表にまとめた．ここで$S_T^{(1)}$は平均過程に関して構成した検定統計量を，$S_T^{(2)}$は2次モーメントに関して構成した統計量を表す．

T	100	200	300	400	500	1000
$S_T^{(1)}$	0.075	0.046	0.059	0.066	0.080	0.072
$S_T^{(2)}$	0.011	0.075	0.168	0.268	0.375	0.766

$S_T^{(1)}$はここでの非線形因果性を検出できないはずであり，実際表中の数字は検定のサイズが出てきている．$S_T^{(2)}$は標本数が200程度では苦しいが，徐々に検出力が上がっていることがわかる．NHKJの6節では他にも様々なケースで実験を行っている．

5. 応用：取引量と価格変化の因果性

1998年9月第1週から2007年10月第4週までの週次日経平均先物データ(標本数1,000)で，価格と取引量の変化量(それぞれdp_t, dv_tと記す)で因果性を検定した．dv_tからdp_tへの平均の因果性は$S_T^{(1)}=11.54<14.38$となって「因果性なし」が受容されるが，dv_tからdp_t^2への2次モーメントの因果性は$S_T^{(2)}=20.81>14.38$となって「因果性なし」は棄却される．(14.38はシミュレーションで算出した5% 有意点である．)dv_tとdp_tの役割を入れ替えると，$S_T^{(1)}=9.95<14.38$, $S_T^{(2)}=8.85<14.38$となって，いずれも因果性は検出されない．これはテクニカルトレーディングで言う「逆ウォッチ」現象を確認するものと解釈できる．

参考文献

Nishiyama, Y., Hitomi, K., Kawasaki, Y. and Jeong, K. (2011) A consistent nonparametric test for nonlinear causality - Specification in time series regression, *Journal of Econometrics*, Vol. 165, No. 1, 112-127. (doi:10.1016/j.jeconom.2011.05.010)