

担保付貸出の損失評価 確率過程を用いた解析的な損失分布のモーメント評価

山下智志 データ科学研究系 教授

【研究の目的と背景】

貸出の信用リスク評価において銀行が被る損失は、貸出先の倒産確率あるいはデフォルト確率と回収率とで表現される。その損失は、デフォルト確率の不確実性と回収率の不確実性だけではなく、両者間の相関も含まれることが知られている。実際、景気後退期にはデフォルト率が上昇するとともに担保資産価値が下落することを通じて、デフォルト率と回収率に負の相関がみられるという実証分析がある(例えばAltman et al. (2005)を参照)。

バーゼルIIの先進的内部格付けアプローチでは、回収率の自行推計にあたり、景気後退期を考慮した回収率を推定するように求めている。2007~08年の金融危機の中でも、企業の信用力の低下(デフォルト率の上昇)とともに担保資産価値の低下が進み、損失額が増加するという問題に注目が集まった。このような状況下において信用リスク管理を行う際、企業のデフォルト率と回収率の相関を的確にリスク量に反映させる必要があることが認識されてきている。こうしたデフォルト率と回収率との間の相関を考慮して、担保付貸出の期待損失を解析的に評価するとともに、損失分布の高次モーメントも解析的に評価する

【デフォルト率と担保の前提条件】

(問題)以下の3つの条件を同時に満たして、損失の期待値を解析的に評価

1. デフォルトは貸出満期までの間、外生的なデフォルト強度(ハザード率)過程で生じうる。
2. デフォルト強度と担保資産価値の変動には負の相関がある。
3. デフォルト強度、担保資産価値は非負性を保つ。

【問題設定】

- 銀行が企業に満期 T で額面 D の担保付融資
- 企業が $\tau < T$ でデフォルト→担保で δA_τ を回収
 - 掛目 δ は固定値
 - 担保価値 A_τ は企業のデフォルト強度と負の相関 ρ を持つ
- 銀行の割引損失: $L = \exp(-r\tau) (D - \delta A_\tau) 1_{\{\tau < T\}}$
 - 損失が負になること(100%超の回収率)は許容する

- **モデル1: 2次ガウシアン・モデル**
 - ガウシアンの状態変数ベクトル $X_t = \begin{pmatrix} y_t \\ \ln A_t \end{pmatrix}$
- **デフォルト強度: ガウシアンOU過程の2乗⇒非負**

$$\lambda_t = (y_t + \alpha + \beta t)^2 \quad dy_t = -\kappa y_t dt + \sigma_y dW_t^y$$
- **担保価値: 幾何ブラウン運動**

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t^A$$

$$\rightarrow d \ln A_t = (\mu_A - \sigma_A^2 / 2) dt + \sigma_A dW_t^A$$
- **ブラウン運動間の相関 ($\rho < 0$)**

$$\text{cov}(dW_t^y, dW_t^A) = d[W_t^y, W_t^A] = \rho dt$$

- 時点0での損失分布の m 次モーメント

$$E[\exp(-r\tau) (D - \delta A_\tau) 1_{\{\tau \leq T\}}] = \sum_{n=0}^m C_n D^{m-n} (-\delta A_0)^n \int_0^T e^{(n\mu_A - nr + (n-1)\sigma_A^2/2)t} d_t \Gamma(0, s | \alpha^{(n)}, y_0^{(n)})$$

$$\alpha^{(n)} = \alpha + \frac{n\rho\sigma_A\sigma_y}{\kappa}, \quad y_t^{(n)} = y_t - \frac{n\rho\sigma_A\sigma_y}{\kappa}$$

- ラドン・ニコディム密度: $\frac{dP^{(n)}}{dP} = \frac{A_t^n e^{-n(\mu_A - (n-1)\sigma_A^2/2)t}}{A_0^n}$

- 時点0での損失分布の分散(標準偏差)

$$\sigma_{L0} = \sqrt{\text{var}[(D - \delta A_\tau) 1_{\{\tau \leq T\}}]}$$

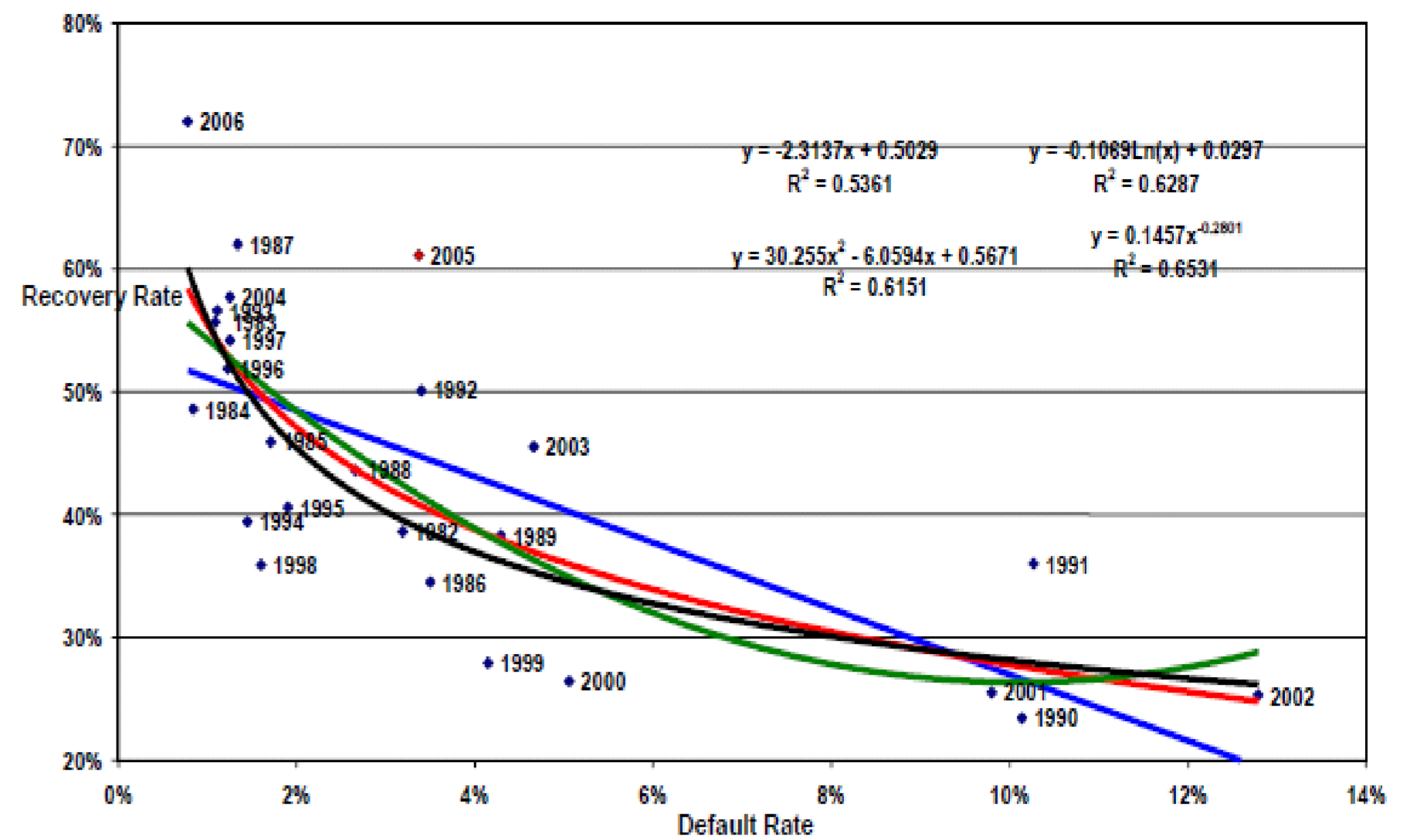
$$\text{var}[(D - \delta A_\tau) 1_{\{\tau \leq T\}}] = E[(D - \delta A_\tau)^2 1_{\{\tau \leq T\}}] - (E[(D - \delta A_\tau) 1_{\{\tau \leq T\}}])^2$$

【まとめ】

デフォルト強度について、平方根過程と2次ガウス過程を想定し、デフォルト強度の非負性を保ち担保価値との相関を持つモデルを構築した。そのうえで、担保付貸出の期待損失を測度変換を用いて解析的に評価した。さらに、より一般的に担保付貸出の損失の高次モーメントについても測度変換を用いて解析的に評価した。ここで得られた高次モーメントを用いれば、損失分布の近似を行うことも可能である。

2次ガウス過程のモデルは3変量以上にも拡張することができ、例えば、確率的な無リスク短期金利を取り込んで担保付貸出の価値評価を行うことができる。ただし、多変量への拡張に伴って多くの相関を設定すると、得られる係数の常微分方程式が閉じた形では解けないことが多くなる。その場合でもRunge-Kutta法などの数値計算により比較的高速な評価は可能である。

単独の担保付貸出を対象として損失分布を評価したが、同じモデルのもとで分析対象を担保付貸出ポートフォリオに拡張し、個々の貸出のデフォルト強度間や担保価値間にも相関を考慮してポートフォリオの損失分布を評価することも考えられる。ポートフォリオ損失の分散を計算する場合は、期待損失で1階積分で評価されていた点は2階積分での評価となり、少し計算に時間がかかることになる



• 平均回収率と平均デフォルト率 (1982-2006) (Altman[2006])



モデル1: 2次ガウシアン・モデル
モデル2: アフィン・モデル

- **モデル2: アフィン・モデル**

- アフィンの状態ベクトル: $X_t = \begin{pmatrix} \lambda_t \\ \ln A_t \end{pmatrix}$

- **デフォルト強度(平方根過程)**

$$d\lambda_t = \kappa(\bar{\lambda} - \lambda_t)dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t} dW_t^\lambda$$

- **担保価値過程**

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t \sqrt{\lambda_t} dW_t^A$$

$$\rightarrow d \ln A_t = (\mu_A - \sigma_A^2 \lambda_t / 2) dt + \sigma_A \sqrt{\lambda_t} dW_t^A$$

- **ブラウン運動間の相関 ($\rho < 0$)** $d[W_t^A, W_t^\lambda] = \rho dt$

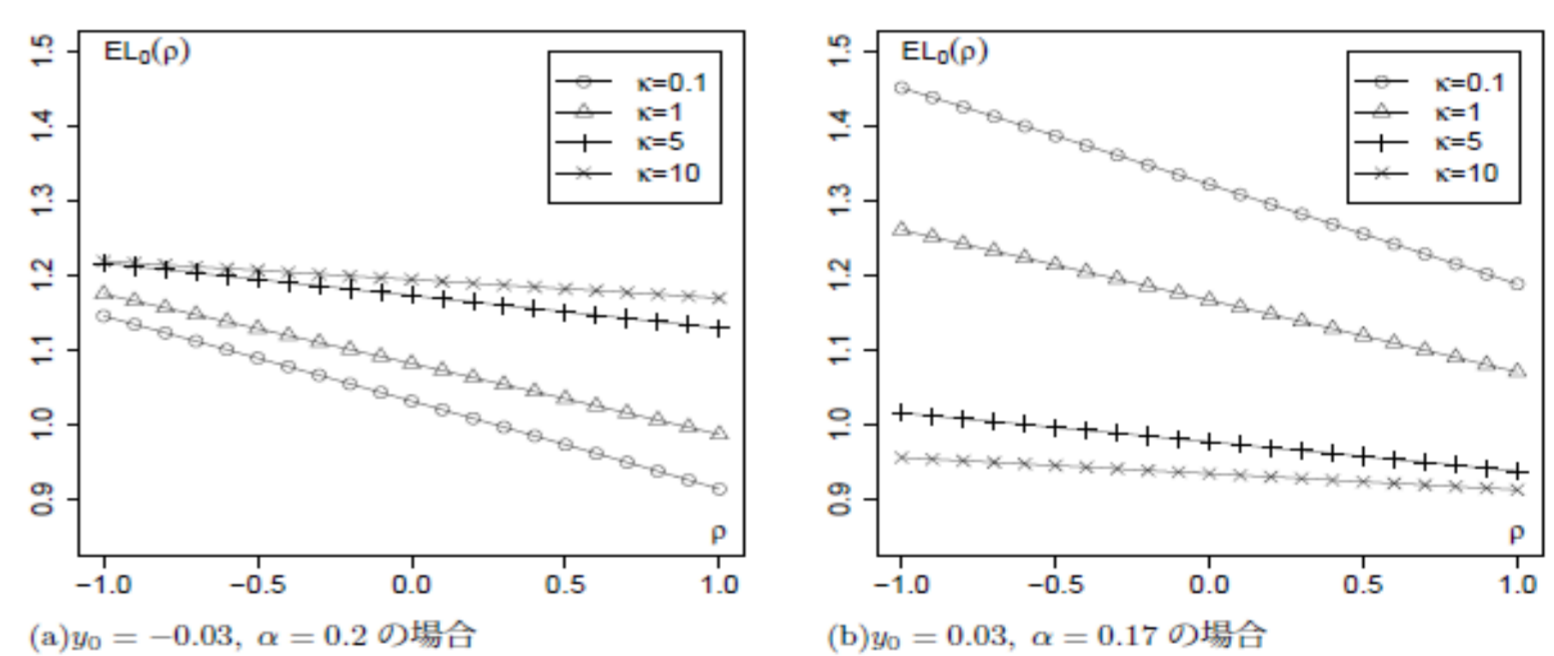


図 2. 相関 ρ に対する期待損失 ($\beta = 0.01$)

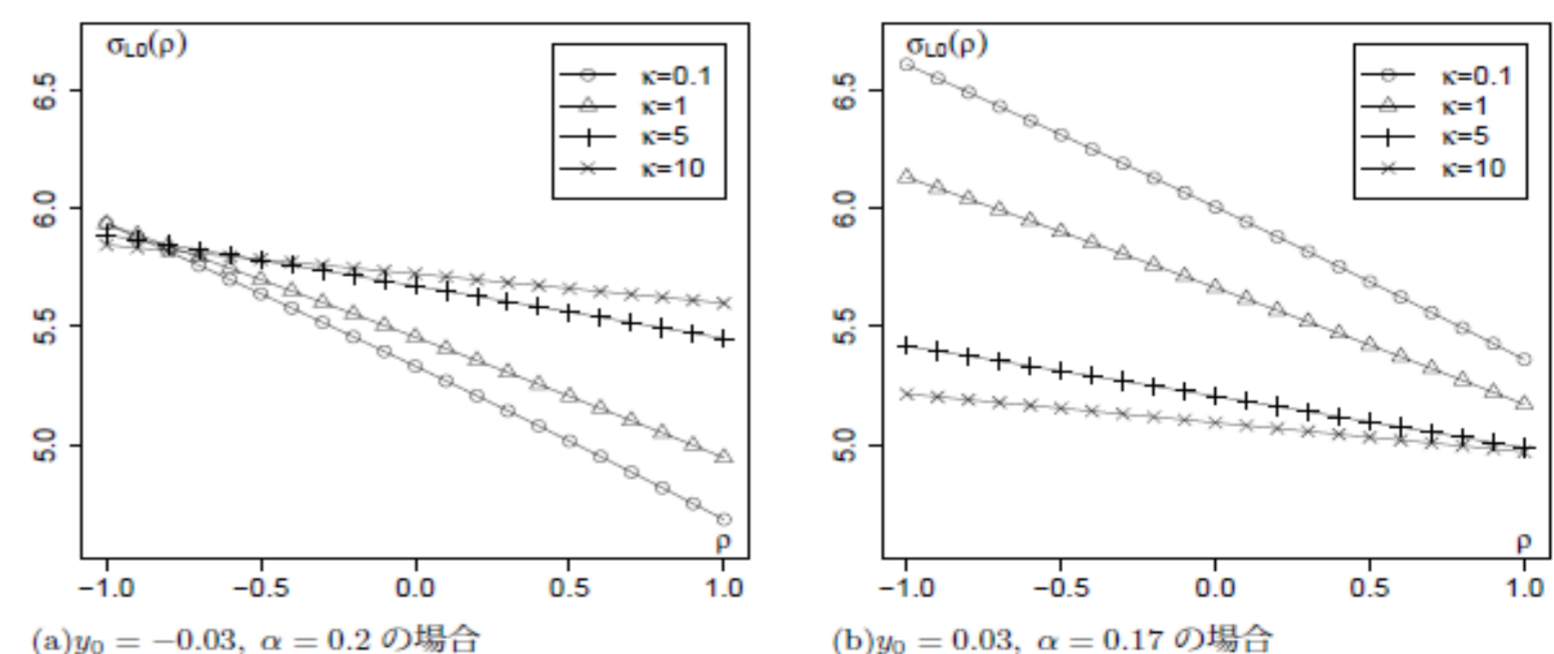


図 3. 相関 ρ に対する損失の標準偏差 ($\beta = 0.01$)

モデル1による計算結果(期待損失と標準偏差)