デフォルト確率・LGD同時推計と規制・会計

山下　智志　　データ科学研究系　教授

【信用リスクの要因分解と推計】

信用リスクは損失の期待値を示すEL(Expected Loss)とUL(Unexpected Loss)によって管理される。ELは損失の期待値であり、PD（デフォルト確率）、LGD（デフォルト時損失率）、EAD（貸出金額）の積によって計算される。ULは経済状況が悪化したときの損失額であり、通常1%もしくは0．1%の生起確率の経済悪化を想定した、条件付き期待値である。これらの計算方法については学術的には多くの選択肢があるが、実務上はBIS規制（バーゼルⅡ）とIFAS（国際会計基準）によって選択範囲が限定されている。

実務的利用を考慮した場合、これらの規制基準に整合した統計モデルが必要とされるが、同時にフィットと安定性という一般的な統計モデルの評価についても十分な精度を保つ必要がある。現在、PD、LGDを同時推計することにより、ELおよびULの精度向上に取り組んでいる。

【BIS規制】

BIS規制ではPD、LGDは別のモデルにより推計され、それを決められたリスクウエイト関数に代入することによりULを求める。

・PD　過去の5～7年以上（資産区分によって異なる）のデータを用いて、ロジットモデルにより推計

・LGD　当局が決めたLGD関数（図2）を用いるか過去の7年以上の回収データを用いてモデル化（担保などの要因は非線形になることが多い）

・それぞれのパラメータをリスクウエイト関数（図3）に代入して必要自己資本を求める

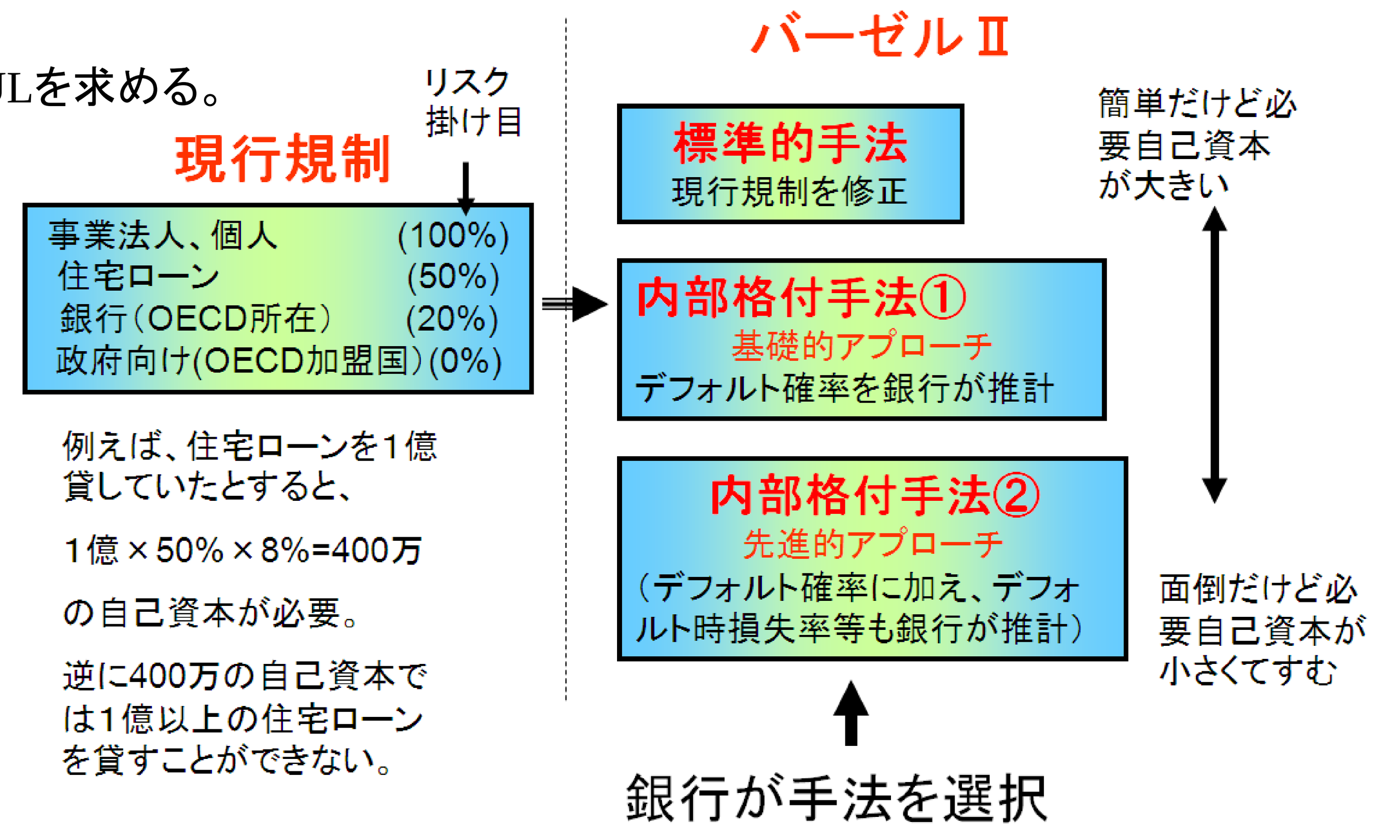


図1　バーゼルⅡの概略

一　信用リスク・アセットの額$=K\times 12.5\times EAD$

二　所要自己資本率$(K)=\left[LGD\times N\left\{(1-R)^{-0.5}\times G(PD)+\left(\frac{R}{1-R}\right)^{0.5}\times G(0.999)\right\}-EL\right]$

$$\times\{1-1.5\times b\}^{-1}\times\{1+(M-2.5)\times b\}$$

ただし、零を下回る場合は零とする。

$N\{x\}$は、標準正規分布の累積分布関数。ただし、PDが百パーセントの場合は一とする（以下同じ。）。

$G(x)$は、$N\{x\}$の逆関数（以下同じ。）

ELは、PDにLGDを乗じた率。ただし、PDが百パーセントの場合は第二百十六条第六項に定めるEL_{default}とする（以下同じ。）。

三　相関係数$(R)=0.12\times\frac{1-EXP(-50\times PD)}{1-EXP(-50)}+0.24\times\left\{1-\frac{1-EXP(-50\times PD)}{1-EXP(-50)}\right\}$

$EXP(x)$は、自然対数の底をx乗した値（以下同じ。）

四　マチュリティ調整$(b)=\{0.11852-0.05478\times\log(PD)\}^2$

図3　バーゼルⅡのリスクウエイト関数

内部格付手法（基礎的手法）のLGD

- 当局LGD　（資産別に担保カバー率を変数とする関数を用意）

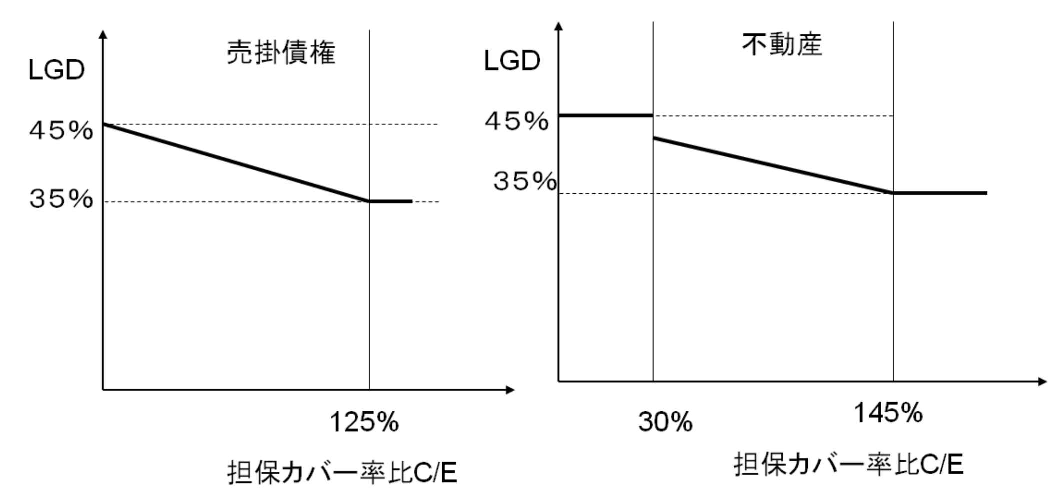


図2　当局LGD関数

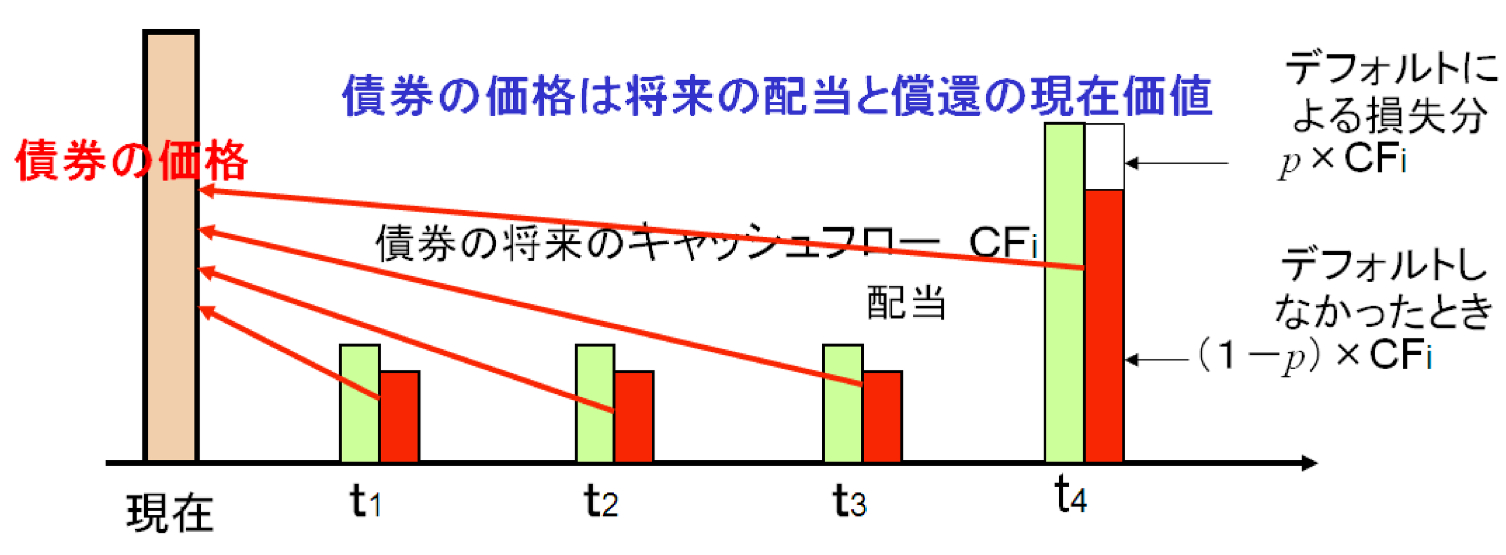
【IFAS（新国際会計基準）】

IFASではPD、LGDは厳密に区分するのではなく、確率的に与えられた将来キャッシュフローを計算することによってELを算出する（図4，図5）。

・データの必要要件については取り決めはない

・割引金利はリスクプレミアムを反映しなければならない

・デフォルトポイントに依存しない



確率pで配当・償還が行われないときはどうなるか？

社債価格PV　$=\sum_{i=1}^{4}\frac{(1-p_i)CF_i}{(1+r_i)^{t_i}}$ ⟶ デフォルト確率pが高いほど債券の価格は低い

図4　キャッシュフローによる現在価値

債権の現在価値は

$$PV=\sum_{t=1}^{T}PV_t=\sum_{t=1}^{T}\left(S_t\times\frac{cD}{(1+r)^t}+P_t\times\frac{\delta D}{(1+r)^t}\right)+S_T\times\frac{D}{(1+r)^T}$$

$$=D\left(\sum_{t=1}^{T}\frac{(1-p)^{t-1}\times((1-p)\cdot c+p\cdot\delta)}{(1+r)^t}+\frac{(1-p)^T}{(1+r)^T}\right)$$

額面1の債権、つまりD=1とおく

$$PV=\sum_{t=1}^{T}\frac{(1-p)^{t-1}\times((1-p)\cdot c+p\cdot\delta)}{(1+r)^t}+\frac{(1-p)^T}{(1+r)^T}$$

割引債の場合、c=0

$$PV=\delta\sum_{t=1}^{T}\frac{p(1-p)^{t-1}}{(1+r)^t}+\frac{(1-p)^T}{(1+r)^T}$$

額面D、クーポンc、割引金利r、満期T、回収率δ

図5　IFASによる社債評価関数の例

【同時推計の試み】

バーゼルⅡではPD・LGDは別のモデルにより計算してもよいが同時推計したPD、LGDを利用することも可能である。一方、IFASではPDとLGDの独立性に疑問があるため、同時推計する方が正確な推計ができる。現在、実データに対してNested Logit モデルを用いることにより、精度向上を試みている

- 企業iに対し、　デフォルト（δi＝1）、非デフォルト（σi＝0）
  損失額：LGD_i、
  企業属性：X_i（財務データ、定性データ、担保など）
  がデータとして得られている。

このときデフォルト確率PiおよびLGDiは以下の式によって求められる

$$\hat{P}_i=\frac{1}{1+\exp(\hat{\boldsymbol\beta}_P\mathbf{X}_i+\beta_{P0})}\qquad \hat{LGD}_i=\frac{1}{1+\exp(\hat{\boldsymbol\beta}_L\mathbf{X}_i+\beta_{L0})}$$

$\hat{\boldsymbol\beta}_P,\hat{\boldsymbol\beta}$の違いによってデフォルトの決定要因と回収率の決定要因を分ける

モデルのパラメータは以下の対数尤度関数を最大化することによって求められる

$$LL=\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{1}{1+\exp(\boldsymbol\beta_P\mathbf{X}_i+\beta_{P0})}\right)^{\delta_i}-\sum_{j=1,j\in D}^{n_D}\left(\frac{(\boldsymbol\beta_L\mathbf{X}_i+\beta_{L0}-s_i)^2}{\sigma^2}\right)^{1-\delta_i}-n_D\log\sigma$$

n_Dは回収できた企業数　　$s_i=\log\frac{1-LGD_i}{LGD_i}$

図6　2段階Nested Logit モデルの構造