角度の変換を用いた円周分布族の拡張

阿部　俊弘　数理推論研究系 特任研究員

- SIDSデータのようなある月のみだけでなく, ある季節を通じて大きな頻度を示す特徴はBatschelet (1981)で紹介されている'flat-topped'の性質を持つ.

- 乳幼児突然死(SIDS)は毎年周期的に起こり, この意味で円周データとみなせる.
- SIDSデータのようなある月のみだけでなく, ある季節を通じて大きな頻度を示す特徴はBatschelet (1981)で紹介されている'flat-topped'の性質を持つ.
- ここでは, 角度を変換することにより, 既存の対称分布を'flat-topped and sharply peaked'の性質を示す分布族に変換する一般式を与える.

1　導入

単峰かつ対称な円周分布として, cardioid分布とvon Mises分布の2つがよく知られている. 位置パラメータをμ $(-\pi \le \mu < \pi)$ として, cardioid分布はpdfが

$$f_{\mathrm{C}}(\theta) = (2\pi)^{-1}(1 + 2\rho\cos(\theta - \mu)), \quad -\pi \le \theta < \pi$$

で与えられる. ここで, $|\rho| \le 1/2$ は集中度を表すパラメータである. 一方, von Mises分布のpdfは

$$f_{\mathrm{vM}}(\theta) = \{2\pi I_0(\kappa)\}^{-1}\exp(\kappa\cos(\theta - \mu)), \quad -\pi \le \theta < \pi,$$

である. ここで, $\kappa \ge 0$ は集中度を表すパラメータであり, $I_0(\kappa)$ は第一種修正ベッセル関数である. Papakonstantinou (1979)とBatschelet (1981 Sects. 15.6 and 15.7)は, これらのpdfにおける$\cos(\theta - \mu)$を

$$\cos(\theta - \mu + \nu\sin(\theta - \mu)), \quad -1 < \nu < 1$$

または,

$$\cos(\theta - \mu + \nu\cos(\theta - \mu)), \quad -1 < \nu < 1 \tag{1}$$

に置き換えることにより, これらの分布の形状を拡張している. ここで, (1)は,

$$\sin(\phi - \mu + \nu\sin(\phi - \mu)), \quad -1 < \nu < 1 \tag{2}$$

と置き換えても一般性は失われない. 一方, Jones and Pewsey (2005)は, 単峰かつ対称な円周分布族として,

$$f_{\mathrm{JP}}(\theta) \propto \{1 + \tanh(\kappa\psi)\cos(\theta - \mu)\}^{1/\psi}, \quad -\pi \le \theta < \pi, \tag{3}$$

を提案している. ここで, μとκは前のものと同様であり, ψ $(-\infty < \psi < \infty)$は形状パラメータと呼ばれている. Jones–Pewsey分布族のウリの一つは, 特別な場合として上で述べた円周分布族の他にも多くの重要な分布を含んでいることである.

2　対称分布族の形状の拡張

2.1　一般的な構成法

2.1.1　定義

一般性を失うことがないので, $\mu = 0$とする. $g(\cos\theta)$ $(-\pi \le \theta < \pi)$ を$\cos\theta$で表わされる, 対称な密度関数とする. このとき,

$$f_\nu(\theta) = c_\nu^{-1} g(\cos(\theta + \nu\sin\theta)), \quad -\pi \le \theta < \pi, \tag{4}$$

を考える. ここで, $-\infty < \nu < \infty$であり, c_ν^{-1}は正規化定数である. $\nu = 0$のとき, $f_\nu(\theta)$は元の密度関数に帰着する, すなわち, $f_0(\theta) = g(\cos\theta)$. 故に, $f_\nu(\theta) = c_\nu^{-1} f_0(\theta + \nu\sin\theta)$ と書くことができる. ここで, $c_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta + \nu\sin\theta)d\theta$である. cosは偶関数であり, sinは奇関数であるので, (4)は$\theta = 0$について対称である.

2.1.2　単峰性

対称な円周分布の密度関数$f_0(\theta) = g(\cos\theta)$を一階の導関数$f_0'(\theta)$を持ち, $f_0'(0) = 0$である単峰な関数とする. また, $f_0(\theta)$は$\theta = 0$でmodeを持ち, $\theta = -\pi$でantimodeを持つとする. このとき, 密度関数(4)は$|\nu| \le 1$のときに限り, 単峰で, $\theta = 0$でmodeを持ち, $\theta = -\pi$でantimodeを持つ. $|\nu| > 1$ならば, $m = 1, 2, \ldots$に対しては, $m\pi < h(\nu) \le (m+1)\pi$のとき, $m = -1, -2, \ldots$に対しては, $m\pi \le h(\nu) < (m+1)\pi$のとき, (4)は$(2|m|+1)$個のmodeを持つ. ここで, $h(\nu) = \cos^{-1}(-1/\nu) + \nu\sqrt{1 - 1/\nu^2}$である.

これらの事実はAbe et al. (2009)におけるProposition 1の証明と同様にして示すことができる.

2.1.3　形状の性質

Section 2.1.2の仮定に加えて, $f_0(\theta)$が2階連続微分可能であり, さらに, θ $(-\pi \le \theta < \pi)$に対して, $f_0(\theta) > 0$とする. $f_\nu'(0) = 0$なので, $\theta = 0$における$f_\nu(\theta)$の曲率は, $f_\nu''(0)/[1 + \{f_\nu'(0)\}^2]^{3/2}$, により定義され, これは$f_\nu''(0)$に等しい.

このとき, $-1 \le \nu_1 < \nu_2 \le 1$に対して:

(a) $f_{\nu_1}(0) < f_{\nu_2}(0)$ かつ$f_{\nu_1}(-\pi) < f_{\nu_2}(-\pi)$,

(b) $f_{\nu_1}''(0) > f_{\nu_2}''(0)$ かつ$f_{\nu_1}''(-\pi) < f_{\nu_2}''(-\pi)$

である. これらの2つの結果はAbe et al. (submitted) において証明されている. (a)と(b)より, νはpeakedness/flat-toppednessを制御するパラメータである. もし, 条件(a) と (b) が満たされるならば, f_{ν_1} はf_{ν_2}よりflat-topped; または, 同じことであるが, f_{ν_2} はf_{ν_1} よりsharply peakedという. $\nu < 0$ならば, f_νは元の密度関数f_0よりflat-topped であり, $\nu > 0$ならば, f_νは元の密度関数f_0よりsharply peakedである.

2.2　Jones–Pewsey分布族の拡張(対称版)

Section 2.1.1の構成法をJones–Pewsey分布族の密度関数(3)に適用すると,

$$f_{\mathrm{SEJP}}(\theta) = c_{\kappa,\psi,\nu}^{-1}\{1 + \tanh(\kappa\psi)\cos(\theta - \mu + \nu\sin(\theta - \mu))\}^{1/\psi}, \quad -\pi \le \theta < \pi,$$

が得られる. ここで, $-\pi \le \mu < \pi$, $\kappa \ge 0$, $-\infty < \psi < \infty$, $-\infty < \nu < \infty$ そして$c_{\kappa,\psi,\nu} = \int_{-\pi}^{\pi}\{1 + \tanh(\kappa\psi)\cos(\theta + \nu\sin\theta)\}^{1/\psi}d\theta$は一般に数値的に計算される. これを対称な拡張型Jones–Pewsey (SEJP)分布族ということにする. この密度関数は$\nu = 0$のとき, Jones–Pewsey分布族, $\psi = 1$のとき, $k = \tanh(\kappa)$として, Papakonstantinou (SEC)の密度関数, $\psi = 0$のとき, Batschelet (SEvM)の密度関数に帰着する. さらに, $\psi = -1$のとき,

$$f_{\mathrm{SEWC}}(\theta) = c_{\kappa,-1,\nu}^{-1}\{1 - \tanh(\kappa)\cos(\theta - \mu + \nu\sin(\theta - \mu))\}^{-1}, \quad -\pi \le \theta < \pi$$

を密度関数に持つ, 対称な拡張型wrapped Cauchy (SEWC)分布に帰着する.

3　非対称分布族の形状の拡張

(4)と同様にして, (2)を用いた非対称分布族の一般的な構成法も可能である. それらの詳細については, Abe et al. (submitted)で詳しく議論されている.

References

[1] Abe T., Pewsey A. and Shimizu K. (2009). On Papakonstantinou's extension of the cardioid distribution. *Stat. Probab. Lett.* 79:2138–2147.

[2] Abe T., Shimizu K. and Pewsey A. Extending circular distributions through transformation of argument. submitted for publication.

[3] Batschelet, E. (1981). *Circular Statistics in Biology.* Academic Press, London.

[4] Jones, M.C. and Pewsey, A. (2005). A family of symmetric distributions on the circle. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **100**, 1422–1428.

[5] Papakonstantinou V (1979). Beiträge zur zirkulären Statistik. PhD thesis, Univ Zurich, Switzerland.