

# パネル動学的構造方程式の推定問題

リスク解析センター

客員教授 国友直人 (東京大学大学院経済学研究科)

## 1 パネル動学的構造方程式モデル

経済のマイクロ・データを扱うマイクロ計量経済学における近年における一つの大きな話題は時間とともに得られる多数の個票 (パネル・データ) より経済学的に意味のある関係 (構造) を推定する問題である。(Hsiao (2003) 参照。) 経済データの分析ではしばしば単にある変数 (被説明変数) を他の説明変数で説明するとみなせる状況ではなく、被説明変数と説明変数に相関があるような状況において構造方程式 (structural equation) を推定する問題がある。この問題は内生性 (endogeneity) 問題とも呼ばれているが、内生性を含む古典的な同時方程式 (simultaneous equations) を拡張してパネル動学的構造方程式、(パネル同時方程式) を推定する問題が重要な話題となっている。

例えば簡単なパネル動学的構造方程式 (panel dynamic structural equation) モデルの例である Blundel-Bond モデル (Blundel and Bond (2000)) は

$$(1.1) \quad y_{it}^{(1)} = \beta_2 y_{it}^{(2)} + \gamma_1 y_{it-1}^{(1)} + \eta_i + u_{it}^{(1)},$$

$$(1.2) \quad y_{it}^{(2)} = \gamma_2 y_{it-1}^{(2)} + \delta \eta_i + u_{it}^{(2)},$$

( $i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T$ ) と表現されるが、ここで ( $u_{it}^{(1)}, u_{it}^{(2)}$ ) は誤差項である。1 番目の構造方程式には内生変数  $y_{it}^{(2)}$ 、ラグ付き内生変数  $y_{it-1}^{(1)}$  及び個別効果  $\eta_i$  に依存している。(  $(y_{it}^{(1)}, y_{it}^{(2)})$  は内生変数ベクトル、 $y_{it-1}^{(1)}$  は 1 番目の構造方程式の説明変数、 $y_{it-1}^{(2)}$  は 2 番目の構造方程式の説明変数、であり、ここでの主要な関心は係数 ( $\beta_2, \gamma_1$ ) の推定問題である。) ここで上の構造方程式 (同時方程式) を内生変数について解いて得られる誘導型 (reduced form) は

$$(1.3) \quad \mathbf{y}_{it} = \mathbf{\Pi} \mathbf{y}_{it-1} + (\boldsymbol{\pi}_i + \mathbf{v}_{it})$$

であるが、 $\mathbf{y}_{it} = (y_{it}^{(1)}, y_{it}^{(2)})'$ ,

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\pi}_i = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix} \eta_i, \mathbf{v}_{it} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} u_{it}^{(1)} \\ u_{it}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

である。

なお、ここでとりあげた線形パネル構造方程式モデルは多次元、より複雑な時系列構造、非線形構造、など様々な方向に一般化できる。

パネル統計モデルにおいては一般に個別効果はフィルターと呼ばれる操作を適用することで取り除くことが考えられる。古くから時間的差分をとる方法が考えられている (差分法)、近年では forward-filtering 法、backward-filtering 法なども有力である。従来 of ミクロ計量経済分析においてはしばしば個別効果を取り除いた上で、最小二乗法 (OLS) や一般化積率法 (GMM) を適用することが行われているが、構造方程式の場合には内生性 (endogeneity) があり、多操作変数 (many instruments) 問題とともに推定法としての妥当性については幾つかの基本的な未解決問題がある。

## 2 パネル LIML 推定量の漸近理論

本報告者はこの問題について赤司健太郎氏 (統計数理研究所・研究員) とともに共同研究を行っているが、制限情報最尤 (limited information maximum likelihood, 通称 LIML) 推定法を用いることで、漸近的には言うまでもなく、有限標本でも信頼できる推定結果が得られる結果が得られた。LIML 推定法は計量経済学・数理統計学では通常の構造方程式・同時方程式モデルの推定問題への古典解として Anderson and Rubin (1949) により導入されたが、本稿はそのアイデアを動学パネル構造方程式に拡張したことになる。数理的には多変量解析における二つの正定符号行列に関する固有値・固有ベクトルの漸近的挙動の分析の問題となる。

パネル方程式の場合には、個体数  $N$  と時間観測数  $T$  の大きさにより様々な漸近理論を考えることができる。特に二つの次元が大きくなる漸近理論は本報告者が以前に構造方程式の推定問題において議論した方法と密接に関係している。(Kunitomo (1980), Anderson, Kunitomo and Matsushita (2008a,b) などを参照。) また、数理統計学の応用として他分野で生じる、次元や説明変数が多い場合の議論と関連があると思われるのでコメントを歓迎したい。今回、とりあえずパネル LIML 法について得られた結果は Akashi and Kunitomo (2010a,b) にまとめておいた。

### 参考文献

- Akashi, K. and N. Kunitomo (2010), “Some Properties of the LIML Estimator in a Dynamic Panel Structural Equation,” Discussion Paper CIRJE-F-707, Graduate School of Economics, University of Tokyo (<http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research/dp/2010>).
- Akashi, K. and Kunitomo, N. (2010), “The Limited Information Maximum Likelihood Approach to Dynamic Panel Structural Equations,” Discussion Paper CIRJE-F-708, Graduate School of Economics, University of Tokyo, (<http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research/dp/2010>).
- Alvarez, J. and M. Arellano (2003), “The Time Series and Cross Section Asymptotics of Dynamic Panel Data Estimators,” *Econometrica*, Vol. 71, 1121-1159.
- Anderson, T.W. and H. Rubin (1949), “Estimation of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations,” *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 20, 46-63.
- Anderson, T.W., N. Kunitomo, and Y. Matsushita (2008a), “On Finite Sample Properties of Alternative Estimators of Coefficients in a Structural Equation with Many Instruments,” Discussion Paper CIRJE-F-576, Graduate School of Economics, University of Tokyo, forthcoming in *the Journal of Econometrics*.
- Anderson, T.W., N. Kunitomo and Y. Matsushita (2008b), “On the Asymptotic Optimality of the LIML Estimator with Possibly Many Instruments,” Discussion Paper CIRJE-F-542, Graduate School of Economics, University of Tokyo, forthcoming in *the Journal of Econometrics*.
- Blundell, R. and S. Bond (2000), “GMM Estimation with Persistent Panel Data : An Application to Production Function,” *Econometric Review*, Vol. 19-3, 321-340.
- Hsiao, Cheng (2003), *Analysis of Panel Data*, Cambridge University Press.(翻訳「ミクロ計量経済学の方法」国友訳, 東洋経済新報社, 2007 年。)
- Kunitomo, N. (1980), “Asymptotic Expansions of Distributions of Estimators in a Linear Functional Relationship and Simultaneous Equations,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol.75, 693-700.