最大値吸引領域における変換について

志村　隆彰
(リスク解析戦略研究センター、数理・推論研究系)

2010 年 3 月

極値分布にはフレシェ、ワイブル、グンベルの 3 種の分布があり、その吸引領域は分布の裾の挙動で特徴付けられる。フレシェ分布の吸引領域の分布の裾がパレート分布のようなべき乗程度（正確には正則変動)、ワイブル分布の場合も有限点付近で同様な挙動に限られるのに対し、グンベル分布の吸引領域は正規分布、指数分布、対数正規分布など際立って幅広い挙動をする裾をもつ分布を含む。この報告では、グンベル分布の吸引領域を中心に、吸引係数の性質、逆数および対数変換に関する話題について話す。

1　準備と問題

F を実数値確率分布、$x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$ をその上端点、$\bar{F}(x)$ を裾 $F(x, \infty)$ とする。$\{X_k : k = 1, 2, \dots\}$ を共通分布 F に従う独立同分布確率変数列とする。その n 項までの最大値 $M_n = \max_{1\le k\le n} X_k$ が定数列 $a_n > 0$ と $b_n \in \mathbb{R}$ により、$(M_n - b_n)/a_n$ としたものが非退化分布 G に収束しているとき、G を極値分布、a_n と b_n を吸引係数といい、分布 F は極値分布 G の吸引領域に属するという。極値分布には、フレシェ分布 $\Phi_\alpha(\alpha > 0)$ 、ワイブル分布 $\Psi_\alpha(\alpha > 0)$、グンベル分布 Λ の異なる 3 種がある。

逆数と対数と呼ぶ 2 通りの変換を考える。確率変数 X と $-1/X$ の分布同士の関係にあるとき、互いに逆数分布の関係にあると呼ぶことにする。上限有限の場合にその上限を 0 に限れば、ある分布が吸引領域に属することとその逆数分布が吸引領域に属することは同値であり、$D(\Phi_\alpha)(\alpha > 0)$ と $D(\Psi_\alpha)(\alpha > 0)$ が、$D(\Lambda)$ の中では上限が無限のものと有限 (0) のものとが対応する。吸引係数の性質を示した後、逆数分布の吸引係数同士の関係を考える。

さて、正規分布と対数正規分布、グンベル分布と指数分布、指数分布とパレート分布など対数変換の関係にある分布の組はいくつもあり、両者の吸引領域への属性は様々である。分布関数 $F(x)$ に対し、対数変換した分布関数とは、$F(\log x)(x > 0)$ 、指数変換した分布関数とは、$F(e^x)$ をいう。これらの変換による吸引領域への属性が保存される条件等について論じる。

2 結果

最初にグンベル分布の吸引領域の吸引係数の性質を与える。

定理 1 *(i)* グンベル分布の吸引領域の分布に対する吸引係数 a_n は緩慢変動関数の自然数値、b_n は Π 変動関数の自然数値である。

(ii) 補助関数が $l(x)$ である Π 変動関数 $f(x)$ が任意に与えられたとき、

$$a_n = l(n), \quad b_n = f(n) = \int_1^n l(t)t^{-1}dt + o(l(n)), \tag{1}$$

を吸引係数とするような $D(\Lambda)$ の分布が存在して、

$$x_F = \lim_{n\to\infty} f(n)$$

となるなる。特に、任意の緩慢変動関数 $l(x)$ に対して、吸引領域の F を吸引係数 $a_n = l(n)$、$b_n = \int_1^\infty l(t)t^{-1}dt$ ととることが出来る。

逆数分布同士の吸引係数の関係を与える。

定理 2 F を上端が無限のグンベル分布の吸引領域に属する分布、H をその逆数分布とする。

(i) F、H の吸引係数をそれぞれ a_n, b_n および c_n, d_n とするとき、次の関係が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}(a_nd_n + b_nc_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}(b_nd_n + 1) \quad = \quad 0.$$

(ii) 吸引係数は、

$$a_nd_n + b_nc_n = 0, \quad b_nd_n + 1 \quad = \quad 0. \tag{2}$$

を満たすように選ぶことが出来る。

(iii) F に対する吸引係数を a_n, b_n とするとき、(2 で定まる c_n, d_n は 逆数分布 H の吸引係数になる。その逆も成り立つ。

対数及び指数変換に対する吸引領域への属性について次がいえる。$D(\Lambda)$ の分布で $(0,\infty)$ 上のもの全体を $D^+(\Lambda)$、$\lim_{x\to\infty} \bar{F}(x+1)/\bar{F}(x) = 0$ を満たすもの全体を $D_0(\Lambda)$ とする。分布 F が指数的裾を持つとは、ある指数 $\gamma > 0$ があって、任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して、$\lim_{x\to\infty} \bar{F}(x+k)/\bar{F}(x) = e^{-k\gamma}$ を満たすときをいう。その全体指数的分布族を $\mathcal{L}(\gamma)(\gamma > 0)$ と書く。$\mathcal{L}(\gamma) \subset D(\Lambda)$ である。

定理 3 (i) $\mathcal{L}(\gamma)$ の対数変換による像は $D(\Phi_\alpha)$ と一致する *($\gamma = \alpha$)*。

(ii) $D_0(\Lambda)$ の対数変換による像は $D^+(\Lambda)$ と一致する。