測度空間における最適化

伊藤　聡　　数理・推論研究系　准教授

半無限計画問題やモーメント問題を含むクラスの問題として，ボレル測度の空間における最適化について研究しています．

1950年代から60年代にかけて研究された電磁気学の問題の一つに、導体の電荷の分布を決定する容量問題があり，これは測度空間における不等式制約条件つき最適化問題として自然に一般化されます．また，古典的なモーメント問題も測度空間上の等式制約条件つき最適化問題として様々な形で一般化され，情報科学・経済学・制御工学・ゲーム理論など多くの分野に応用されています．

ここでは，これら測度空間における最適化の研究から派生したものとして，無限次元において必ずしも最適解を持たない線形計画問題の目的関数値の下限を求めるアルゴリズムについて報告します．

1　無限次元線形計画問題

X および Y をコンパクトなハウスドルフ空間とし，連続関数 $f \in C(X)$, $g \in C(Y)$, $\varphi \in C(X \times Y)$ が与えられているとき，X 上の可積分関数の空間 $L_1(X)$ において線形計画問題

$$
(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \displaystyle\inf_{h \in L_1(X)} \int_X f(x)\, h(x)\, dx \\ \text{subject to} \quad \displaystyle\int_X \varphi(x,y)\, h(x)\, dx \ge g(y) \quad (\forall y \in Y) \\ \qquad\qquad\quad h(x) \ge 0 \ \text{ a.e. on } X \end{cases}
$$

を考える（許容解のクラスとして　$L_1(X)$　の代わりに連続関数の空間 $C(X)$ や区分的連続関数の空間 $PC(X)$ を考えてもよい）．ここで，問題(P)の目的関数値は下に有界であり

$$
\int_X \varphi(x,y)\, h_0(x)\, dx > g(y) \quad (\forall y \in Y)
$$
$$
h(x) \ge 0 \ \text{ a.e. on } X
$$

なる $h_0 \in L_1(X)$ が存在することを仮定し，この目的関数値の下限を求めたい．

2　目的関数値の下限を求めるアルゴリズム

問題(P)の目的関数値の下限 $V(\mathrm{P})$ を求めるため，切除平面法に基づく以下のようなアルゴリズムを考える．ここで，$M(X)$ は X 上の符号つきボレル測度の空間である．

Step 1: $\varepsilon > 0$ を十分小さい正数，$Y_0 = \{y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{n_0}^0\}$ を Y の有限部分集合とし，$n_0 = |Y_0|$, $k = 0$ とおく．

Step 2: 半無限計画問題

$$
(\mathrm{P}(Y_k)) \qquad \begin{cases} \displaystyle\min_{\mu \in M(X)} \int_X f(x)\, d\mu(x) \\ \text{subject to} \quad \displaystyle\int_X \varphi(x,y)\, d\mu(x) \ge g(y) \quad (\forall y \in Y_k) \\ \qquad\qquad\quad \mu \ge 0 \end{cases}
$$

およびその双対

$$
(\mathrm{D}(Y_k)) \qquad \begin{cases} \displaystyle\max_{\nu \in R^{n_k}} \sum_{i=1}^{n_k} g(y_i^k)\, \nu_i \\ \text{subject to} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n_k} \varphi(x, y_i^k)\, \nu_i \le f(x) \quad (\forall x \in X) \\ \qquad\qquad\quad \nu \ge 0 \end{cases}
$$

の最適解 $\mu^k \in M(X)$ および $\nu^k \in R^{n_k}$ を求める．

Step 3:

$$
\delta(\mu^k) := \min_{y \in Y} \left\{ \int_X \varphi(x,y)\, d\mu^k(x) - g(y) \right\}
$$

を計算し，右辺の最小解 $\bar{y}^k$ を求める．

Step 4: $\delta(\mu^k) \ge -\varepsilon$（$\varepsilon > 0$ は十分小さな正数）なら，問題$(\mathrm{P}(Y_k))$の最適目的関数値$V\big(\mathrm{P}(Y_k)\big)$ を問題(P)の目的関数値の下限 $V(\mathrm{P})$ の近似値として，計算を終了する．

Step 5: $A_k = \{y_i^k \in Y_k \mid \nu_i^k > 0\}$, $n_{k+1} = |A_k| + 1$, $Y_{k+1} = A_k \cup \{\bar{y}^k\} = \{y_1^{k+1}, y_2^{k+1}, \ldots, y_{n_{k+1}}^{k+1}\}$ とおき，$k := k+1$ としてStep 2へ戻る．

Step 2における半無限計画問題は適当な仮定のもとで有限回の反復で解くことができる．

3　アルゴリズムの収束

一般に問題(P)の最適解は $L_1(X)$ の範囲には存在しないが，許容解のクラスを $M(X)$ に拡大すれば，すなわち

$$
(\mathrm{CP}) \qquad \begin{cases} \displaystyle\min_{\mu \in M(X)} \int_X f(x)\, d\mu(x) \\ \text{subject to} \quad \displaystyle\int_X \varphi(x,y)\, d\mu(x) \ge g(y) \quad (\forall y \in Y) \\ \qquad\qquad\quad \mu \ge 0 \end{cases}
$$

に対しては，1節の仮定のもとで最適解の存在が保証される．

前節のアルゴリズムの収束に関して以下の定理が成立する（定理中のいずれの仮定も問題設定を工夫することにより満たすことができる）．

定理 1. Step 2で生成される問題$(\mathrm{P}(Y_k))$の解の列 $\{\mu^k\} \subset M(X)$ が有界ならば，問題(CP)の最適解 μ^* に収束する $\{\mu^k\}$ の部分列が存在し，また対応する $\delta(\mu^k)$ も $\delta(\mu^*)$ に収束する．

定理 2.

$$
\int_X \varphi(x,y)\, d\bar{\mu}(x) > 1 \quad (\forall y \in Y)
$$

を満たす非負測度 $\bar{\mu} \in M(X)$ が存在するならば，$\delta(\mu^k) < 0$ のとき

$$
\left| V(\mathrm{P}) - V\big(\mathrm{P}(Y_k)\big) \right| \le \left| \delta(\mu^k) \int_X f(x)\, d\bar{\mu}(x) \right|,
$$

また $\delta(\mu^k) \ge 0$ のとき$V(\mathrm{P}) = V\big(\mathrm{P}(Y_k)\big)$ が成立する．

4　数値実験

ここで，$X = Y = [-1, 1]$, $f(x) = 1$, $g(y) = 1$, $\varphi(x,y) = \big((x-y)^2 - 2\big)^2$ のとき，すなわち

$$
(\bar{\mathrm{P}}) \qquad \begin{cases} \displaystyle\min_{h \in L_1[-1,1]} \int_{-1}^{1} h(x)\, dx \\ \text{subject to} \quad \displaystyle\int_{-1}^{1} \big((x-y)^2 - 2\big)^2 h(x)\, dx \ge 1 \quad \big(\forall y \in [-1,1]\big) \\ \qquad\qquad\quad h(x) \ge 0 \ \text{ a.e. on } [-1,1] \end{cases}
$$

に対する数値実験の結果を報告する．

この問題に最適解は存在せず，目的関数値の下限は$V(\bar{\mathrm{P}}) = 4/9 = 0.\dot{4}$ で与えられる．また，対応する問題(CP)の最適解μ^* は離散測度（$\mu^*(-1) = 1/9$, $\mu^*(0) = 2/9$, $\mu^*(1) = 1/9$）となる．

$\varepsilon = 10^{-4}$ として2節のアルゴリズムを実行した結果を以下に示す．ここで定理2より得られる誤差評価

$$
|\, V(\mathrm{P}) - V(\mathrm{P}(Y_k))\, | \le |\, \delta(\mu^k)\, |
$$

が成立していることに注意されたい．

Y_0	k	$V(\mathrm{P}(Y_k))$	$\delta(\mu^k)$	CPU
$\{0.5\}$	10	0.444421	-6.8430e-5	3.5868
$\{-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}\}$	5	0.444444	-1.4283e-7	1.2055
（X を離散化）	-	0.444221	-	25.9961

参考文献

Ito, S., Wu, S.-Y., Shiu, T.-J. and Teo, K. L. (2010). A numerical approach to infinite-dimensional linear programming in L_1 spaces, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **6**-1, 15–28.