

交互作用効果モデルと過大分散モデルを 用いたコウホート分析

——「日本人の国民性調査」データへの適用——

統計数理研究所 中 村 隆

(1995 年 1 月 受付)

1. はじめに

継続調査が回を重ねてデータが蓄積されてくると、その分析のためにより複雑なモデルが適用可能となり、また複雑なモデルによる分析が妥当といえる場合が多くなる。しかしこのとき、調査誤差を適切に考慮しないと複雑なモデルが有利になりすぎるといった問題が生じる。ここでは、「日本人の国民性調査」データの蓄積に対応するために、これまでのベイズ型ロジット・コウホートモデルに年齢×時代の交互作用効果をもつモデルと過大分散パラメータを考慮するモデルを加えて ABIC によりモデル選択を行なう方法を示す。

コウホート分析は継続調査データの分析方法であり、同一調査項目について得られる年齢×調査時点別の集計データから年齢・時代・世代（コウホート）効果を分離することによって、社会変化の要因を明らかにしようとする方法である。データの変動が主に年齢効果によるものであることがわかれば、社会の成員の意見や態度は加齢にともなって変化するが、社会全体としての意見や態度の分布は長期間にわたって安定しているということがいえる。これに対しデータの変動がコウホート効果であることがわかれば、個々の成員の意見や態度は変わりにくい、世代交代によって社会全体での分布はゆるやかに変化していくことが予測できる。またそれが主に時代効果によるものであることがわかれば、年齢や世代によらず社会の成員全体の意見がある一定の方向に変化しているので流動的であり、ある時点を境に逆の方向に転換する可能性もある。このように 3 つの要因を区別して明らかにすることが社会変化の機構を解明する上で重要であり、コウホート分析がそのための有力な方法であることが指摘されてきた (Ryder (1965), Glenn (1977), Mason and Fienberg (1985))。

1953 年 (昭和 28 年) から 5 年ごとに実施されてきた「日本人の国民性調査」は、それ自体が日本人の戦後昭和期および平成における意識の動向を記録してきたことで貴重な史料であるばかりでなく、定期的にはほぼ同じ形式で質問を継続してきたことによってコウホート分析するのに格好なデータを提供している。いわば蓄積されてきた国民性調査データがコウホート分析を要求しているのである。実際、以下で述べるベイズ型コウホートモデルは、第 6 次調査後のデータの分析を契機に、ベイズ型モデルの枠組みと赤池のベイズ型情報量規準 ABIC を用いることによって誕生し、その後のデータの蓄積と計算機環境の改善によって成長してきている。

コウホート分析は、年齢・時代・コウホート効果を 3 つの説明要因とする対数線形モデルなどの応用であるとみられるが、3 効果の間に 1 次従属の関係が存在するために何らかの制約条件がなければ 3 効果を一義に推定できないという識別問題を抱えている。この困難への対応方

法としては、大きく2つに分かれ、何らかの制約条件を付加して3効果のパラメータを推定しようとするものと (Mason et al. (1973), Fienberg and Mason (1978), 宮野 (1983), 丹後 (1984), 石井 (1984)), 3効果のパラメータそのものの推定は避け統計学的に推定可能な (非線形) 成分の推定に議論を限るもの (Holford (1983), 赤井・渋谷 (1985), 丹後 (1985), 丹後・倉科 (1987), Hirotsu (1988)) とがある。

コホート分析の本来の目的が3効果の分離であることから、中村 (1982) は前者の付加条件を課す立場にたち、隣り合うパラメータの1次階差の2乗和を小さく抑えるという (節約原理を実現する) パラメータの漸進的变化の条件を取り込んだベイズ型コホートモデルを定式化し、ABICにより最適なパラメータを推定する方法を提案した。つづいて Nakamura (1986) は、パラメータの漸進的变化の条件の柔軟性を利用して、年齢区分幅と調査間隔が一致しない一般のコホート表データの分析を可能にし、また回答比率以外のデータを分析するための数量型コホートモデルを開発した。さらに中村 (1989) は、年齢効果を拡張した年齢×時代の交互作用効果をもつモデルを提案した。

以下、まず第2節では、コホート分析が対象とするコホート表とコホートモデル、コホート分析における識別問題について簡単に説明する。第3節では、過大分散を評価するための疑似対数尤度と識別問題を克服するベイズ型コホートモデルについて述べ、3効果モデルの他に単効果モデルや交互作用効果モデルなどの間で ABIC を用いてモデル選択を行なう方法についてまとめる。第4節では、「日本人の国民性調査」データを実際に分析したいいくつかの例を通して、過大分散パラメータ・モデルと交互作用効果モデルの有用性を示す。

2. 比率型標準コホート表の分析モデル

2.1 コホート表

年齢区分×調査時点の形式に何らかの数量を集計・整理した表を、コホート分析の立場からはコホート表と呼ぶ。コホート表には、形式上、調査間隔と年齢区分幅が一致する標準コホート表と一致しない一般コホート表が区別できる。また、整理された数量の性質上、回答比率の場合を特に比率型のコホート表として区別する。以下では5年ごとに実施されている国民性調査を念頭に比率型の標準コホート表に話を限るが、次節で述べるベイズ型コホートモデルは、一般コホート表の場合や回答比率以外の数量型データの場合へも容易に拡張できる (Nakamura (1986))。

標準コホート表は次のようにして得られる。 Y_1 年から Δ 年ごとに Y_j 年まで J 回の調査が実施されているとし、各回の調査結果は Δ 歳幅の A_1 から A_I までの I 個の年齢区分について集計されているものとする。 Y_1 年調査の A_1 年齢区分が一番古いコホート区分に対応するからこれを C_1 とすると、最新の Y_j 年調査の A_1 年齢区分が一番新しいコホート区分 C_k に対応し、 Δ 歳幅の合計 K 個のコホート区分が現れる。標準コホート表の場合、 $K=I+J-1$ であり、 Y_j 年調査の A_i 年齢区分を (i, j) セルと呼ぶことにすれば、このセルには C_k コホート区分が対応する($k=j-i+I$)。

2.2 コホートモデル

比率型 (ロジット) コホートモデルは、 (i, j) セルの正反応確率 (セル確率) を p_{ij} とするときそのロジット変換 q_{ij} を次のような3効果の線形和に分解するモデルである (APCモデル, Age-Period-Cohort model, と呼ぶ)。

$$(2.1) \quad q_{ij} \equiv \log p_{ij} / (1 - p_{ij}) = \mu + \mu_i^A + \mu_j^P + \mu_k^C, \\ i=1, \dots, I; j=1, \dots, J; k=1, \dots, K.$$

ここで、 μ は総平均効果、 μ_i^A 、 μ_j^P 、 μ_k^C はそれぞれ年齢、時代、コウホート効果であり、次のゼロ和制約を満たすように基準化しておく。

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^I \mu_i^A = \sum_{j=1}^J \mu_j^P = \sum_{k=1}^K \mu_k^C = 0.$$

各セルと各効果を対応づける適当なデザイン行列を D とすると、(2.1) は (2.2) を考慮して、

$$(2.3) \quad \mathbf{q} = D\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{1}D_*) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu}_* \end{pmatrix}$$

と書くことができる。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (q_{11}, q_{21}, \dots, q_{IJ})', \\ \boldsymbol{\mu} &= (\mu, \boldsymbol{\mu}_*)', \\ \boldsymbol{\mu}_* &= (\mu_1^A, \dots, \mu_{I-1}^A, \mu_1^P, \dots, \mu_{J-1}^P, \mu_1^C, \dots, \mu_{K-1}^C)', \\ \mathbf{1} &= (1, \dots, 1)'. \end{aligned}$$

デザイン行列 D の具体例はたとえば中村(1982)にある。

2.3 識別問題

行列 $D_* = (\mathbf{d}_1^A \cdots \mathbf{d}_{I-1}^A \mathbf{d}_1^P \cdots \mathbf{d}_{J-1}^P \mathbf{d}_1^C \cdots \mathbf{d}_{K-1}^C)$ のように列ベクトルに分けると

$$-\sum_{i=1}^{I-1} \left(i - \frac{I+1}{2} \right) \mathbf{d}_i^A + \sum_{j=1}^{J-1} \left(j - \frac{J+1}{2} \right) \mathbf{d}_j^P - \sum_{k=1}^{K-1} \left(k - \frac{K+1}{2} \right) \mathbf{d}_k^C = \mathbf{0},$$

あるいは、上の係数を並べたベクトルを $\boldsymbol{\theta}_*$ として、

$$D_* \boldsymbol{\theta}_* = \mathbf{0}$$

という線形関係があることがわかる。これが3効果を一義に決定できないというコウホート分析における識別問題の源泉である。すなわち、 $\boldsymbol{\theta} = (0, \boldsymbol{\theta}_*)'$ とおくと、 α を任意の実数として、

$$\mathbf{q} = D\boldsymbol{\mu} = \mu\mathbf{1} + D_*\boldsymbol{\mu}_* = \mu\mathbf{1} + D_*\boldsymbol{\mu}_* + \alpha D_*\boldsymbol{\theta}_* = D(\boldsymbol{\mu} + \alpha\boldsymbol{\theta})$$

であるから、 $\boldsymbol{\mu}_* = \boldsymbol{\mu} + \alpha\boldsymbol{\theta}$ も同じ \mathbf{q} を与える。より具体的には

$$\begin{cases} \mu_* = \mu, \\ \mu_{*i}^A = \mu_i^A - \left(i - \frac{I+1}{2} \right) \alpha, & i=1, \dots, I-1; \\ \mu_{*j}^P = \mu_j^P + \left(j - \frac{J+1}{2} \right) \alpha, & j=1, \dots, J-1; \\ \mu_{*k}^C = \mu_k^C - \left(k - \frac{K+1}{2} \right) \alpha, & k=1, \dots, K-1; \end{cases}$$

である。

3. ベイズ型コウホートモデル

3.1 拡張疑似対数尤度

国民性調査では層別多段抽出法を用いているので、サンプリング・モデルに単純無作為抽出の超幾何分布を近似する二項分布を想定すると、一般に誤差分散を過小評価する可能性があり、誤差変動を拾ってより複雑なモデルが有利になることが考えられる。ここでは、この過大分散の問題に対処するために通常対数尤度の代わりに拡張疑似対数尤度 (extended quasi-log-likelihood) を用いることにする。

Wedderburn (1974) は、1次と2次のモーメントだけを特定する次の疑似対数尤度 Q を定義し、過大分散パラメータ ϕ を考慮する途を拓いた。

$$\frac{\partial Q(y; \mu)}{\partial \mu} = \frac{y - \mu}{\phi V(\mu)}.$$

ここで、 y が観測値であり、平均が μ 、分散が $\phi V(\mu)$ である。たとえば、正規分布の場合は $V(\mu) = 1$ 、二項分布を拡張する場合は $V(\mu) = \mu(1 - \mu)$ とすればよい。

上の Q の最大化では ϕ を推定できないため、Nelder and Pregibon (1987) は次の拡張疑似対数尤度 Q^+ を定義した。

$$Q^+(y; \mu) = -\frac{1}{2} \log\{2\pi\phi V(\mu)\} - \frac{1}{2\phi} D(y; \mu).$$

ここで、 D は疑似対数尤度比関数(deviance function)で

$$D(y; \mu) = -2\{Q(y; \mu) - Q(y; y)\} = -2 \int_y^\mu \frac{y-u}{V(u)} du$$

である。

二項分布に過大分散を考慮した場合の拡張疑似対数尤度 $\log f$ は、以下では過大分散パラメータを σ^2 に代えて、最終的に

$$(3.1) \quad \log f(\mathbf{n} | \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}), \sigma^2) = -\frac{IJ}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{X^2}{2\sigma^2}$$

と書ける。 $\sigma^2 = 1$ とすれば二項分布の場合の通常対数尤度に一致する。ここで、 N_{ij} 、 n_{ij} をそれぞれ (i, j) セルのサンプルサイズと観測された正反応度数として、

$$\begin{aligned} X^2 &= 2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \{n_{ij} \log n_{ij} / N_{ij} p_{ij} + (N_{ij} - n_{ij}) \log (N_{ij} - n_{ij}) / N_{ij} (1 - p_{ij})\}, \\ \mathbf{n} &= (n_{11}, n_{21}, \dots, n_{IJ})', \\ \mathbf{p} &= (p_{11}, p_{21}, \dots, p_{IJ})', \end{aligned}$$

である。

3.2 パラメータの漸進的変化の条件

コウホート分析における識別問題を克服するために、パラメータの漸進的変化の条件——各効果で隣り合うパラメータの値の変化を小さくするという条件——をモデルに付加する。具体的には、次のような各効果の1次階差の2乗和を小さくする。

$$(3.2) \quad \frac{1}{\sigma_A^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\mu_i^A - \mu_{i+1}^A)^2 + \frac{1}{\sigma_P^2} \sum_{j=1}^{J-1} (\mu_j^P - \mu_{j+1}^P)^2 + \frac{1}{\sigma_C^2} \sum_{k=1}^{K-1} (\mu_k^C - \mu_{k+1}^C)^2 \longrightarrow \text{小}.$$

ここで、 $\sigma_a^2, \sigma_b^2, \sigma_c^2$ は 3 効果に対する適当な重み (の逆数) であり、これらを導入することによってパラメータの変動の大きさに関して 3 効果の間でトレードオフを行なうことができる。たとえば年齢効果における変動が真に大きければ σ_a^2 を大きくとることによって 2 乗和全体を小さく抑えることができるからである。

上の条件 (3.2) を正規分布の密度関数を用いて書き換えれば

$$(3.3) \quad \pi(\boldsymbol{\mu}_* | \sigma_a^2, \sigma_b^2, \sigma_c^2, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{M}{2}} |D'_s S^{-1} D_s|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \boldsymbol{\mu}'_* D'_s S^{-1} D_s \boldsymbol{\mu}_*\right\}$$

となり、この π を事前密度と考えることができる。ここで、 D_s は 1 次階差を表現する適当な行列である (具体例は中村 (1982) にある)。また、 $S = \text{diag}\{\sigma_a^2, \dots, \sigma_a^2, \sigma_b^2, \dots, \sigma_b^2, \sigma_c^2, \dots, \sigma_c^2\}$ であり、 $M = I + J + K - 3$ とおいた。

3.3 ベイズ型モデル

パラメータの推定は (拡張疑似) 事後密度 $f \cdot \pi$ のモードにより行なう。すなわち、

$$(3.4) \quad f(\mathbf{n} | \boldsymbol{\mu}, \sigma^2) \cdot \pi(\boldsymbol{\mu}_* | \sigma_a^2, \sigma_b^2, \sigma_c^2, \sigma^2) \longrightarrow \max.$$

超パラメータ ($\sigma_a^2, \sigma_b^2, \sigma_c^2$) を固定すれば、(3.4) は適当な初期値から出発して Newton-Raphson 法により解くことができ (ステップ幅の詳細については付録 A に示す)、得られるパラメータの推定値 $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ は σ^2 にはよらない。推定値 $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ の分散は (B.1) より得られる。

3.4 ABIC 最小化法

未知である超パラメータ $\sigma_a^2, \sigma_b^2, \sigma_c^2, \sigma^2$ は次の ABIC 最小化法により決定する (Akaike (1980))。

$$\text{ABIC} = -2 \log (\text{周辺尤度}) + 2h = -2 \log \int f \cdot \pi d\boldsymbol{\mu}_* + 2h.$$

ここで、 h は超パラメータの数である。

コウホートモデルについて上の ABIC を超パラメータの関数として近似的に評価すると次のようになる (詳細は付録 B に示す)。

$$(3.5) \quad \text{ABIC} = \begin{cases} \hat{X}^2 + \hat{\boldsymbol{\mu}}'_* D'_s S^{-1} D_s \hat{\boldsymbol{\mu}}_* + R + 2h_* & (\sigma^2 = 1 \text{ の場合}), \\ (IJ) \log \hat{\sigma}^2 + IJ + R + 2(h_* + 1) & (\sigma^2 \neq 1 \text{ の場合}), \end{cases}$$

ここで、

$$\begin{aligned} R &= -\log |D'_s S^{-1} D_s| + \log |D'_* \hat{V}^{-1} D_* + D'_s S^{-1} D_s|, \\ \hat{\sigma}^2 &= (\hat{X}^2 + \hat{\boldsymbol{\mu}}'_* D'_s S^{-1} D_s \hat{\boldsymbol{\mu}}_*) / IJ, \\ \hat{X}^2 &= 2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \{n_{ij} \log n_{ij} / N_{ij} \hat{p}_{ij} + (N_{ij} - n_{ij}) \log (N_{ij} - n_{ij}) / N_{ij} (1 - \hat{p}_{ij})\}, \\ \hat{V} &= \text{diag}\{1 / N_{ij} \hat{p}_{ij} (1 - \hat{p}_{ij})\} \end{aligned}$$

であり、 h_* は σ^2 の分を除いた超パラメータの数である。

ABIC を最小にする ($\sigma_a^2, \sigma_b^2, \sigma_c^2$) は簡便な格子探索法で見つける。より具体的には、 $\sigma_a^2, \sigma_b^2, \sigma_c^2$ のそれぞれについてあらかじめ候補を与え、これらのすべての組合せについて ABIC の値を求めた後、それらの中で最小の ABIC を与える組合せを超パラメータの推定値 ($\hat{\sigma}_a^2, \hat{\sigma}_b^2, \hat{\sigma}_c^2$) とする。パラメータの推定値 $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ は σ_a^2 等の変化にそれほど敏感でないことが経験的にわかっている。格子探索法の代わりに適当な数値的最適化法を用いることもできる。

超パラメータの候補としては、たとえば σ^2 の $\{2^{-7}, 2^{-6}, \dots, 2^{-1}, 1, 2, \dots, 2^6, 2^7\}$ 倍を考える。ここで σ^2 は任意であるが、すべてのセルについての観測ロジットの分散の相乗平均に相当する

$$\sigma^2 = \sqrt[4]{\prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J N_{ij} / \{n_{ij}(N_{ij} - n_{ij})\}}$$

を用いている。以下では煩雑になるのを避けるため、 σ^2 を σ_A^2 等の 1 単位と考えて、 σ_A^2 等の推定値としては 2 のべき乗部分のみを示しているのに注意。

3.5 交互作用効果モデル

継続調査によるデータの蓄積に対応するために、これまで述べてきた 3 効果モデル (APC モデル) よりも複雑な次のような年齢×時代の交互作用効果 μ_{ij}^{AP} をもつモデル ([AP]PC モデルと略記する) を考える。すなわち、

$$q_{ij} = \mu + \mu_{ij}^{AP} + \mu_j^P + \mu_k^C.$$

これは、APC モデルの年齢効果 μ_i^A を μ_{ij}^{AP} に拡張したものである。ここで、交互作用効果のゼロ和制約は

$$\sum_{i=1}^I \mu_{ij}^{AP} = 0, \quad j=1, \dots, J$$

である。

パラメータの漸進的変化の条件は、超パラメータ $\sigma_{P|A}^2$ が 1 つ増えて

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_A^2} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{I-1} (\mu_{ij}^{AP} - \mu_{i+1,j}^{AP})^2 + \frac{1}{\sigma_{P|A}^2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J-1} (\mu_{ij}^{AP} - \mu_{i,j+1}^{AP})^2 \\ & + \frac{1}{\sigma_P^2} \sum_{j=1}^{J-1} (\mu_j^P - \mu_{j+1}^P)^2 + \frac{1}{\sigma_C^2} \sum_{k=1}^{K-1} (\mu_k^C - \mu_{k+1}^C)^2 \longrightarrow \text{小} \end{aligned}$$

のようになる。この条件は、年齢効果のパラメータが時代とともに緩やかに変化するということを表現している。

さて、コウホート効果 μ_k^C は、交互作用効果に $\mu_{ij}^{AP} = \mu_k^C$ というコウホート制約を課したものとみることでもできる。この場合、年齢効果の山や谷が 1 年あたり 1 歳ほどの速度で高齢の方に移動する成分を捉えることになる。しかし、たとえば既婚率のように晩婚化の影響で数十年かけて数年ピークが移動するような現象は、コウホート制約では十分捉えきれないと考えられる。上で導入した年齢×時代の交互作用効果は、パラメータの漸進的変化の条件を付加することによって、コウホート効果以外のこのような変化の成分を捉えようとしたものである。

3.6 コウホートモデル群

これまでに述べた 3 効果モデル (APC モデル) と交互作用効果モデル ([AP]PC モデル) の他に、各効果の有無によって次のようなコウホートモデルの変種を考えることができる。すなわち、無効果モデル (μ モデル)、単効果モデル (A, P, C モデル)、2 効果モデル (AP, AC, PC モデル)、交互作用効果モデル ([AP], [AP]P, [AP]C モデル) である。さらに、これら 12 のモデルのそれぞれについて過大分散パラメータの有無による 2 つの亜種が考えられるから、結局 24 のモデルからなるモデル群が得られる (以下では、過大分散パラメータをもつモデルには σ_2 をつけて、たとえば APC σ_2 モデルのように区別する)。これが当面のモデル選択の対象である。

これらのモデルを ABIC の値が小さい順に並べて上位の複数のモデルをみれば、どの効果の

影響力が大きいのか、あるいは影響力がほとんどない効果はどれなのか、といった判断を下すことができる。個々のモデルに関するパラメータの推定や ABIC の計算は、デザイン行列 D 、階差行列 D_s 、超パラメータ行列 S を適当に定め、 h に注意するだけで、前に述べた ABIC 最小化法により同様に行なうことができる。

4. 国民性調査データの分析例

4.1 “#1.3 学歴”

パラメータの漸進的変化の条件が有効に働いてコホート分析における識別問題が克服できることを示す典型例として、“学歴”の分析結果をあげる。

学歴は 20 歳台前半で決定し、以後あまり変わらないはずのものであるから、社会調査の調査項目の中でほとんど唯一、コホート効果のみが存在すると予想できる変数である。この意味で学歴は、実際のデータに対してコホートモデルがうまく働くかどうかを判断するための試金石である。

表 1 は、国民性調査の“#1.3 学歴”について男の“高校卒”をコホート分析した結果であ

表 1. “#1.3 学歴(高校卒)” [男] のコホートモデル選択表.

モデル	ABIC	Δ ABIC	h	σ^2	σ_A^2	σ_P^2	σ_C^2	$\sigma_{P A}^2$
C	142.6389	-	2	1.2521	-	-	1	-
C	143.0937	0.4548	1	1	-	-	1	-
[AP]C	144.9020	2.2630	3	1	1/16	-	1	128
AC	144.9620	2.3230	3	1.2453	1/128	-	1	-
PC	145.0895	2.4506	3	1.2380	-	1/64	1	-
AC	145.2944	2.6554	2	1	1/128	-	1	-
PC	145.2949	2.6560	2	1	-	1/64	1	-
[AP]C	146.6985	4.0596	4	1.2486	1/128	-	1	1/128
[AP]PC	147.0089	4.3700	4	1	1/16	1/64	1	128
APC	147.2621	4.6232	4	1.2312	1/128	1/64	1	-
APC	147.3503	4.7113	3	1	1/128	1/64	1	-
[AP]PC	149.1288	6.4899	5	1.2346	1/128	1/64	1	1/128
[AP]P	174.2075	31.5686	3	1	4	1	-	2
[AP]P	174.2103	31.5714	4	0.6246	8	2	-	4
AP	196.2722	53.6333	3	2.1903	1/2	1/2	-	-
AP	227.6335	84.9946	2	1	1	1	-	-
A	279.7809	137.1420	2	7.2194	1/8	-	-	-
[AP]	282.1227	139.4838	3	7.2048	1	-	-	1/128
P	289.1952	146.5563	2	8.0616	-	1/8	-	-
μ	311.9414	169.3024	1	11.5166	-	-	-	-
[AP]	539.0609	396.4220	2	1	4	-	-	4
A	638.8924	496.2535	1	1	1	-	-	-
P	716.1727	573.5338	1	1	-	1	-	-
μ	1036.4974	893.8585	0	1	-	-	-	-

表2. “#1.3学歴(高校卒)” [女] のコウホートモデル選択表 (11位以下略).

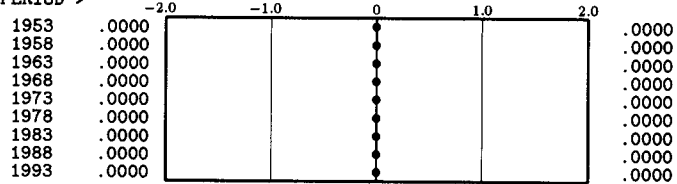
モデル	ABIC	Δ ABIC	h	σ^2	σ_A^2	σ_P^2	σ_C^2	σ_{PIA}^2
C	167.9369	-	2	1.5140	-	-	2	-
AC	170.0926	2.1557	3	1.5025	1/128	-	2	-
PC	170.5319	2.5950	3	1.4986	-	1/64	2	-
[AP]C	170.6461	2.7092	4	1.3716	1/16	-	2	128
[AP]C	170.8415	2.9046	3	1	1/2	-	4	4
APC	172.5847	4.6478	4	1.4880	1/128	1/64	2	-
[AP]PC	173.2020	5.2651	4	1	1/2	1/64	4	4
[AP]PC	173.2839	5.3470	5	1.3615	1/16	1/64	2	128
C	173.8371	5.9002	1	1	-	-	4	-
AC	175.5893	7.6524	2	1	1/64	-	4	-

< GRAND MEAN >

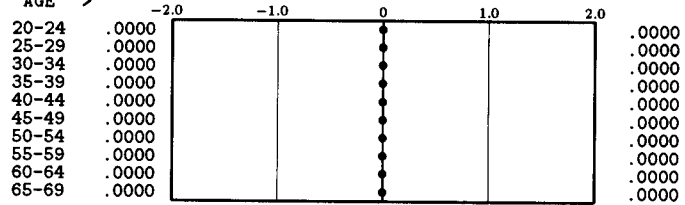
-0.8578
(29.8%)

-0.8286
(30.4%)

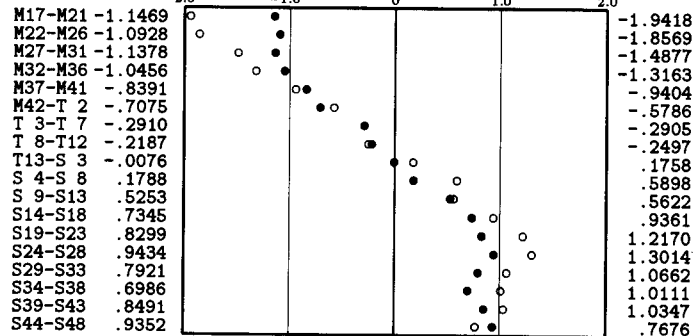
< PERIOD >



< AGE >



< COHORT >



[男] (●)

[女] (○)

図1. “#1.3学歴(高校卒)” のコウホート分析結果 (男女とも C_{σ^2} モデル).

表3. “#1.3 学歴(大学卒)” [男] のコウホートモデル選択表 (11位以下略).

モデル	ABIC	Δ ABIC	h	σ^2	σ_A^2	σ_P^2	σ_C^2	σ_{PIA}^2
PC	145.7510	-	2	1	-	1/4	1	-
PC	146.9739	1.2228	3	1.1372	-	1/4	1	-
APC	147.8822	2.1311	3	1	1/128	1/4	1	-
[AP]PC	149.0075	3.2565	4	1	1/32	1/4	1	128
APC	149.1530	3.4019	4	1.1328	1/128	1/4	1	-
[AP]PC	150.7013	4.9503	5	1.0848	1/32	1/4	1	128
AC	152.6420	6.8909	3	1.2846	1/16	-	1	-
AC	153.1240	7.3730	2	1	1/8	-	1	-
[AP]C	153.9644	8.2134	3	1	1	-	1	1/2
[AP]C	154.8704	9.1194	4	1.2467	1	-	1	1/128

る。「モデル」の下にある最初の2列にコウホートモデルの略号が示してあり、ABICの小さい順に上から下に並べてある。第1列は過大分散パラメータのないモデル (σ^2 はすべて1), 第2列は過大分散パラメータのあるモデルである(表では煩雑になるので σ^2 は省略した)。「ABIC」の列はABIC, 「 Δ ABIC」の列はABIC 最小モデルとのABICの差である。「 h 」の列は超パラメータの数, 「 σ^2 」の列は過大分散パラメータの推定値である。「 σ_A^2 」「 σ_P^2 」「 σ_C^2 」「 σ_{PIA}^2 」の列は各効果に対応する超パラメータの推定値である (σ^2 を1単位としたものであることに注意)。煩雑になるので推定値を意味する「も省略した。

男の“高校卒”では C_{σ^2} モデルが最適モデル(最小ABICモデル)として選ばれ、過大分散は $\sigma^2=1.25$ 程度と見積もられている。次位も過大分散のない(すなわち $\sigma^2=1$ の)Cモデルである。両者は、コウホート効果の超パラメータが $\sigma_C^2=1$ で同じなので、パラメータの推定値もまったく同じである。ABICの小さい上位のモデルはいずれもコウホート効果を含んでいる。また3位以下の[AP]C, AC_{σ^2} , PC_{σ^2} モデルそれぞれの交互作用効果, 年齢効果, 時代効果も実際にみると変化の幅はひじょうに小さい。女の“高校卒”のモデル選択結果を表2に(上位10位まで)示したが、ここでも C_{σ^2} モデルが1位に選ばれている。以上のことから男女とも“高校卒”は予想のとおりコウホート効果のみで説明される。

図1に、男女の“高校卒”を分析した C_{σ^2} モデルの結果を示した。‘●’が男の結果, ‘○’が女の結果である。〈GRAND MEAN〉のところにあるのは総平均効果 μ の値であり, ()の中はそれを逆ロジット変換した値である。〈PERIOD〉, 〈AGE〉, 〈COHORT〉のところにそれぞれ時代, 年齢, コウホート効果のパラメータの値を示してある。値はゼロ和制約のために0の基準線のまわりにプロットされる。記号が右にあるほど当該の回答比率を高める効果があることを示している。 C_{σ^2} モデルでは、時代および年齢効果のところはすべて0である。

男女とも、明治、大正、昭和生まれと新しいコウホートが次々と高学歴化することによって日本社会全体が高学歴化してきたことが明瞭にわかる。“高校卒”については戦後生まれのコウホートでピークを迎えている。ここで、コウホート区分の両端の方のパラメータの値について注意しておく。すなわち、これらのコウホートには対応するセルが少ないため、コウホート効果の変動幅が大きい場合に観測データに引きずられた動きがみられることがある。

一方、“大学卒”は“高校卒”とはやや様子が異なる。表3, 4はそれぞれ男と女の“大学卒”をコウホート分析した結果である。いずれもPCモデルが最適モデルとして選ばれている。

図2に男女の“大学卒”の時代効果とコホート効果のパラメータの推定値を示した。男女とも予想のとおりコホート効果が支配的ではあるが、時代効果も無視できない大きさを示している。このような大学卒比率の時代的増加については、国勢調査のデータを同一コホートについて追跡した結果として、山田(1992)も報告している。時代効果が現れる原因としては、学歴と回収率との相関、不実回答などが考えられよう。

“小学卒”、“中学卒”についても、ここでは示さないが、“大学卒”とは反対の減少する時代効果、および交互作用効果が見られる。

4.2 “#2.7一番大切なもの(家族)”

年齢×時代の交互作用効果モデルが有効に機能している例として、“#2.7一番大切なもの(自由回答)”という問に“家族が大切”と答えた者の比率を分析した結果をあげる。

表5,6はそれぞれ男女についてのモデル選択結果である。男女とも[AP]Pまたは[AP]P σ^2 モデルが最適モデルとして選ばれている(過大分散パラメータ σ^2 の有無による違いはほとんどない)。次善の[AP]PCまたは[AP]PC σ^2 モデルでもコホート効果の変化の幅はひじょうに小さく、“家族が大切”ではコホート効果が認められないということが注目される。

図3は、男について、最適モデルの[AP]Pモデルによる推定値を示したものである。〈AGE〉のところには年齢×時代の交互作用効果 $\mu_{ij}^{\sigma^2}$ をまとめて表示した。プロットしてある数字は国民

表5. “#2.7一番大切なもの(家族)”[男]のコホートモデル選択表(11位以下略)。

モデル	ABIC	Δ ABIC	h	σ^2	σ_A^2	σ_P^2	σ_C^2	σ_{PIA}^2
[AP]P	147.8381	-	3	1	8	2	-	1/2
[AP]P	149.7940	1.9559	4	0.9672	8	2	-	1/2
[AP]PC	149.8964	2.0583	4	1	8	2	1/128	1/2
[AP]PC	151.8415	4.0034	5	0.9634	8	2	1/128	1/2
APC	154.8577	7.0196	4	1.4450	1/2	1	1/8	-
AP	155.6745	7.8364	3	1.6268	1/2	1	-	-
APC	156.3662	8.5281	3	1	1	2	1/4	-
AP	161.2522	13.4142	2	1	1	2	-	-
PC	178.7960	30.9579	3	2.3277	-	1	1/8	-
P	187.7549	39.9168	2	3.1325	-	1/2	-	-

表6. “#2.7一番大切なもの(家族)”[女]のコホートモデル選択表(11位以下略)。

モデル	ABIC	Δ ABIC	h	σ^2	σ_A^2	σ_P^2	σ_C^2	σ_{PIA}^2
[AP]P	126.0428	-	4	0.6634	16	2	-	1/2
[AP]P	126.7427	0.6999	3	1	8	1	-	1/4
[AP]PC	127.1096	1.0668	5	0.6220	16	2	1/8	1/2
[AP]PC	127.2183	1.1755	4	1	8	1	1/8	1/8
APC	127.7956	1.7528	3	1	1	1	1/8	-
APC	129.7956	3.7528	4	1.0014	1	1	1/8	-
AP	130.5798	4.5370	2	1	1	1	-	-
AP	131.8441	5.8013	3	1.1418	1	1	-	-
[AP]C	146.7663	20.7235	3	1	16	-	1	1/8
AC	147.5744	21.5316	2	1	2	-	1	-

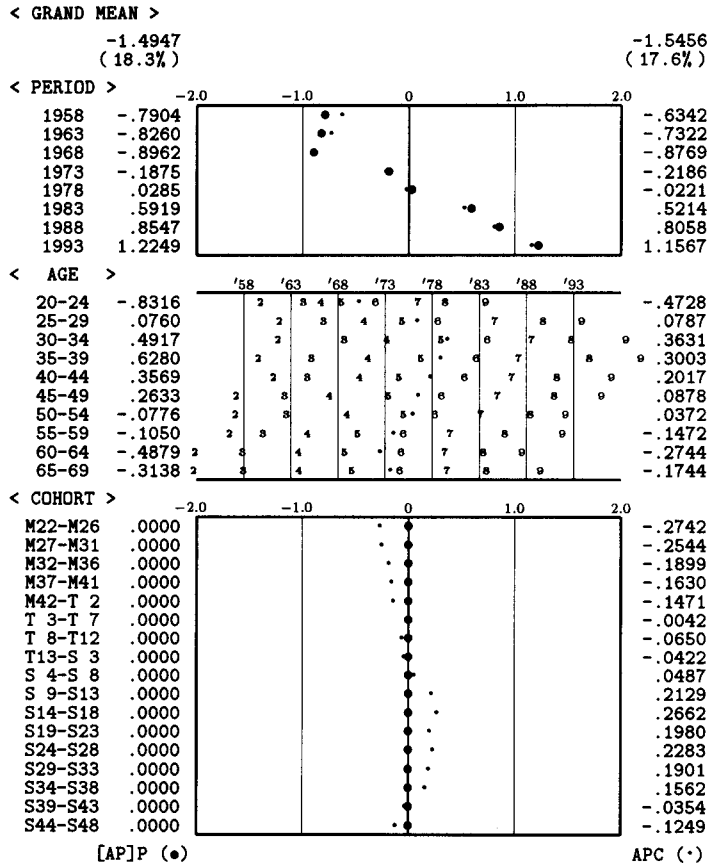


図3. “#2.7一番大切なもの(家族)” [男] のコウホート分析結果 ([AP]P と APC モデル).

性調査の調査回を表わす。単純に重ねると判別しにくい時代ごとに原点をずらして表示してあり、略記した西暦年の位置がそれぞれの時代の原点を示す。交互作用効果の推定値は最近の時代の分のみを示したので注意。また図4は、女について、最適モデルの[AP]P₀₂モデルの結果を示したものである。両図ともに小さい‘.’でAPCモデルによる結果を参考のためプロットした。もし交互作用効果モデルを導入しなければ、表5と表6でわかるように、APCモデルが最適モデルとして得られたはずである。

分析結果をみると、男女とも“家族が大切”は1973年以降の時代効果により増加していることが明らかである。世代や年齢によらず社会全体として増加しているわけである。この他に、年齢×時代の交互作用効果を見ると、男では、年齢効果のピークが1958年時点の20歳台後半から1993年時点の30歳台後半へ、女では、1993年時点の30歳台前半へとゆっくり移っている。晩婚化とそれに伴う子どもの誕生の遅れが関係していると考えられる。APCモデルで見られていたコウホート効果は、上のような年齢効果の緩やかな変化を、全期間に共通する1つの年齢効果では捉えきれなかったために現れていたと考えられる。

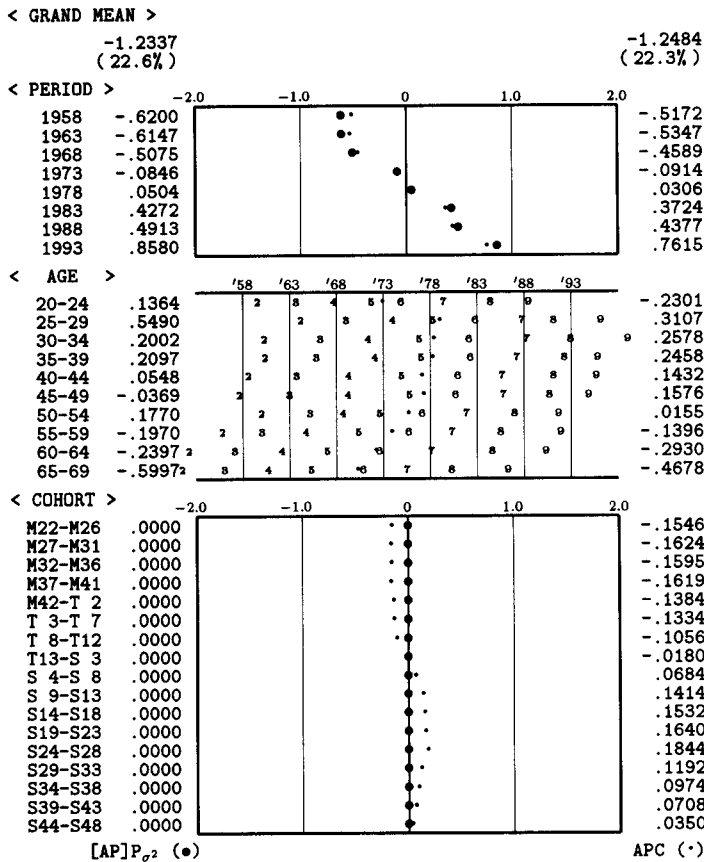


図4. “#2.7 一番大切なもの(家族)” [女] のコウホート分析結果 ([AP]Pσ² と APC モデル).

4.3 “#2.4 暮らし方(社会につくす)”

過大分散パラメータの有無が大きな違いをもたらした例として、“#2.4 暮らし方”の質問のうち“社会につくす”の結果を示す。

表7, 8はそれぞれ男女についてのモデル選択結果である。男女とも [AP]Pσ² モデルが最適モデルとして選ばれている。ここで、過大分散パラメータをもつモデル(表の第2列目)を除外したとすると、男では [AP]P モデルでほとんど変わらない結果を得るが、女では PC モデルが最適モデルであり、男女でかなり異なる結果となる。

図5, 6にそれぞれ男女の最適モデルである [AP]Pσ² モデルの推定値を APC モデルのそれと対比させて示した。過大分散パラメータ・モデルを導入しなければ、男は [AP]P モデル([AP]Pσ² モデルと推定値はほとんど同じ)、女は PC モデル(APC モデルと推定値はほとんど同じ)であるので、男女で結果が異なり、やや解釈に苦しむ。しかし、過大分散パラメータ・モデルを導入すると男女とも最適モデルが [AP]Pσ² で一致するので理解がしやすい。時代効果における長期的な低落傾向と、年齢×時代の交互作用効果における特徴、すなわち、若年での年齢効果のあり方が時代とともに変化してきている様子がみてとれる。“社会につくさない”と

表7. “#2.4 暮らし方(社会につくす)” [男] のコウホートモデル選択表 (11位以下略).

モデル	ABIC	Δ ABIC	h	σ^2	σ_A^2	σ_P^2	σ_C^2	σ_{PIA}^2
[AP]P	129.3497	-	4	0.6507	4	1	-	1
[AP]P	129.7134	0.3637	3	1	2	1	-	1/4
[AP]PC	131.5235	2.1738	5	0.6494	4	1	1/128	1
[AP]PC	131.9208	2.5711	4	1	2	1	1/128	1/4
AP	136.6951	7.3454	2	1	1/4	1	-	-
APC	136.9688	7.6191	3	1	1/4	1	1/32	-
AP	137.4252	8.0754	3	1.1986	1/4	1/2	-	-
APC	138.3453	8.9955	4	1.1479	1/4	1/2	1/32	-
PC	143.8715	14.5217	3	1.2403	-	1/2	1/4	-
PC	144.1167	14.7670	2	1	-	1/2	1/4	-

表8. “#2.4 暮らし方(社会につくす)” [女] のコウホートモデル選択表 (11位以下略).

モデル	ABIC	Δ ABIC	h	σ^2	σ_A^2	σ_P^2	σ_C^2	σ_{PIA}^2
[AP]P	86.4540	-	4	0.4803	4	1/2	-	1/2
[AP]PC	88.0911	1.6371	5	0.4919	2	1/2	1/8	1/2
PC	92.8307	6.3768	3	0.7354	-	1/4	1/4	-
PC	93.5125	7.0585	2	1	-	1/8	1/8	-
AP	94.7616	8.3076	3	0.7762	1/8	1/2	-	-
AP	94.9092	8.4553	2	1	1/8	1/4	-	-
[AP]P	94.9155	8.4615	3	1	1	1/4	-	1/8
APC	94.9874	8.5334	4	0.7322	1/128	1/4	1/4	-
APC	95.6110	9.1570	3	1	1/128	1/8	1/8	-
[AP]PC	96.1171	9.6631	4	1	1/4	1/8	1/8	1/8

いう回答傾向は、より新しい世代に固有の傾向（コウホート効果）というわけではなく、社会全体の動きがとくに若年齢層のあり方を変化させていることによる、という結論になるであろう。

5. おわりに

「日本人の国民性調査」のような継続調査データの蓄積に対応するために、交互作用効果モデルと過大分散パラメータ・モデルを含めたコウホートモデル群の中で、ABICによりモデル選択を行なう方法を提案し、実際の国民性調査データの分析例を通じてその有用性を示した。以下では、いくつかの点についてまとめと補足を行なう。

1) 識別問題とパラメータの漸進的变化の条件

3効果モデルおよび交互作用効果モデル以外の、無効果、単効果、2効果モデルには識別問題は存在しない。これらのモデルに対しては、パラメータの漸進的变化の条件は平滑化をほどこす技法であるとみなすことができる。これらのモデルに3効果モデルおよび交互作用効果モデルを含めてモデル選択を行ない、ABICの小さい上位のモデルの間

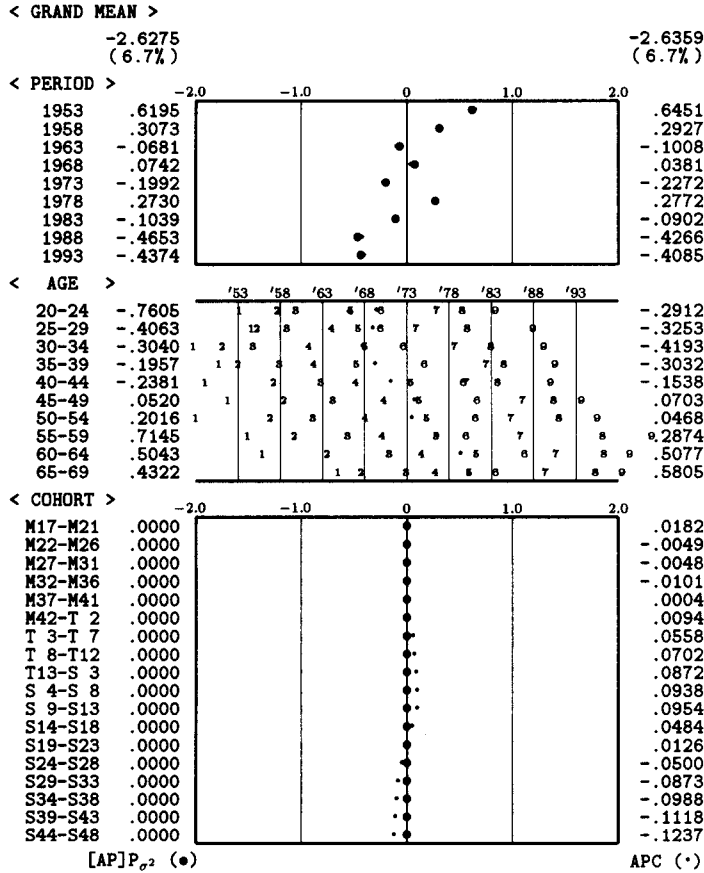


図5. “#2.4 暮らし方(社会につくす)” [男] のコホート分析結果 ([AP] P_{σ²} と APC モデル).

で妥当な結果が得られれば、識別問題の存在するモデルについてもパラメータの漸進的変化の条件が有効に働いているとみることができよう。ここで、妥当な結果とは、たとえば、APC モデルと PC モデルがモデル選択の結果上位にあり、両者で時代とコホート効果の推定値はほとんど変わらず、年齢効果の推定値は APC モデルでは変化の幅が小さい、といった場合のことである。

また、コホート分析では、識別問題を克服する観点から、理論的な考察によりモデルを特定すべきであるとしばしばいわれるが、学歴はコホート効果しかないはずであるという考察からは 4.1 節でみたような“大学卒”の時代効果は発見できないかもしれない。対象とする変数ごとの個別の考察なしに、ベイズ型コホートモデルによればパラメータの漸進的変化の条件を付加することによりほぼ自動的に“大学卒”におけるような発見ができることを強調しておきたい。

2) 年齢×時代の交互作用効果

継続調査の調査期間が長期にわたると、平均寿命などの変化によってライフサイクルが変化し、特に年齢効果を全期間に共通するものとして想定するのは困難になる。そこ

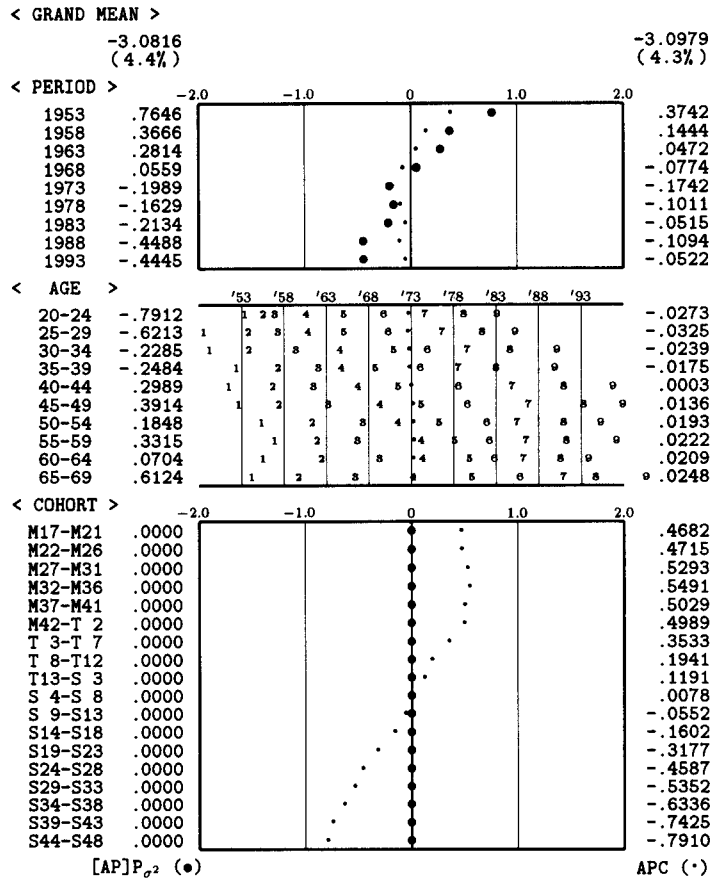


図6. “#2.4 暮らし方(社会につくす)”[女]の cohorts 分析結果 ([AP] P_{σ²} と APC モデル).

で、3 効果モデルの年齢効果を年齢×時代の交互作用効果に拡張したモデルを提案した。年齢×cohortsの交互作用効果としての拡張も考えられるが、cohortsごとに年齢区分が同じにならないこと、標準cohorts表以外では同一cohortsを追いかけられないことなど、モデリング上の困難がある。

年齢×時代の交互作用効果モデルが適切に機能している例として4.2節の“家族が大切”の分析結果をあげることができ、晩婚化の影響を捉えることができた。3 効果モデルに留まっていると、cohorts効果が存在するという結論になる可能性もあるわけである。

3) 過大分散パラメータ・モデル

拡張疑似対数尤度に基づく過大分散パラメータ・モデルを導入し、現実の層別多段階抽出法による標本誤差の影響評価を試みた。ABIC に対して通常の尤度の代わりに拡張疑似尤度を用いる点については議論の余地が十分残されており、今後の課題でもあるが、近似的な方法としてまた簡便な方法として有用であると考えられる。

国民性調査データのcohorts分析を通じていえることは、上位にある過大分散パラ

メータの有無だけが違うモデルは近いところに位置し、パラメータの推定値もほとんど変わらないため、結論を左右することは多くの場合ないということである。しかし、4.3節でみた“くらし方(社会につくす)”のような例も存在するため、他の社会調査データの分析法についても過大分散を考慮することが有用になる場面のあることが示唆される。

一方、表6から8に見られるように、過大分散パラメータ σ^2 が1よりかなり小さい場合が散見された。層化抽出により1を下まわることもあり得るはずだが、年齢×時代の交互作用効果の実際の推定値をみると、誤差の部分を持ち過ぎていているという印象も免れ得ない。この点への対処は将来の課題の1つである。

謝 辞

国民性調査委員会の先達および同僚諸氏、また調査に協力して下さった関係者の方々は、40年以上にもわたる貴重な調査データの蓄積を通してコウホート分析のための豊かな研究土壌を与えて下さった。3名のレフェリーの方々には有益かつ適切なコメントをいただいた。ここに記して心より感謝いたします。なお、本研究の一部は、文部省科学研究費(平成4年度一般研究(C) 課題番号04630019)および統計数理研究所共同研究(4-共A-94, 5-共A-99, 6-共A-91)の援助を受けている。

付録 A. 最大化問題 $f \cdot \pi \rightarrow \max$

まず、 $\ell = \log f \cdot \pi$ とおくと、(3.1), (3.3) より

$$(A.1) \quad \begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2) = & -\frac{IJ}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{X^2}{2\sigma^2} \\ & -\frac{M}{2} \log(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2} \log |D'_s S^{-1} D_s| - \frac{1}{2\sigma^2} \boldsymbol{\mu}'_* D'_s S^{-1} D_s \boldsymbol{\mu}_* \end{aligned}$$

である。

次に、 I を単位行列、 $P = \text{diag}\{p_{ij}\}$, $N = \text{diag}\{N_{ij}\}$, $V = \{NP(I-P)\}^{-1}$ とおくと、 $\partial \mathbf{q}' / \partial \boldsymbol{\mu} = D'$, $\partial \mathbf{p}' / \partial \mathbf{q} = P(I-P)$, $\partial X^2 / \partial \mathbf{p} = -2\{P(I-P)\}^{-1}(n - N\mathbf{p})$ であるから、

$$\begin{aligned} \sigma^2 \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\mu}} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \boldsymbol{\mu}} \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial X^2}{\partial \mathbf{p}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}'} \boldsymbol{\mu}'_* D'_s S^{-1} D_s \boldsymbol{\mu}_* \\ &= D'(n - N\mathbf{p}) - (0, \boldsymbol{\mu}'_* D'_s S^{-1} D_s)' \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}' & \mathbf{0}' \\ D'_* & D'_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n - N\mathbf{p} \\ -S^{-1} D_s \boldsymbol{\mu}_* \end{pmatrix} = A' \mathbf{c}, \\ \sigma^2 \frac{\partial^2 \ell}{\partial \boldsymbol{\mu} \partial \boldsymbol{\mu}'} &= -DN \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \boldsymbol{\mu}'} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}'} (0, \boldsymbol{\mu}'_* D'_s S^{-1} D_s)' \\ &= -\begin{pmatrix} \mathbf{1}' \\ D'_* \end{pmatrix} NP(I-P)(\mathbf{1} \ D'_*) - \begin{pmatrix} \mathbf{0}' \\ D'_s \end{pmatrix} S^{-1} (\mathbf{0} \ D_s) \\ &= -\begin{pmatrix} \mathbf{1}' & \mathbf{0}' \\ D'_* & D'_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \ D_* \\ \mathbf{0} \ D_s \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \mathbf{1}' V^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}' V^{-1} D_* \\ D'_* V^{-1} \mathbf{1} & D'_* V^{-1} D_* + D'_s S^{-1} D_s \end{pmatrix} = -A' B^{-1} A \end{aligned}$$

となり、Newton-Raphson法のステップ幅 $\Delta \boldsymbol{\mu}$ は

$$\Delta\boldsymbol{\mu} = -\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \boldsymbol{\mu} \partial \boldsymbol{\mu}'}\right)^{-1} \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\mu}} = (\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}'\mathbf{c}$$

のように得られる。これを用いて $\boldsymbol{\mu} \leftarrow \boldsymbol{\mu} + \Delta\boldsymbol{\mu}$ により更新すればよい。ここで、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{D}_* \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{S} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{n} - \mathbf{N}\mathbf{p} \\ -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}_s\boldsymbol{\mu}_* \end{pmatrix}$$

とおいた。
さらに、

$$\mathbf{D}_v = \mathbf{D}_* - (\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{D}_*, \quad \mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_v \\ \mathbf{D}_s \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$(A.2) \quad \begin{cases} \Delta\boldsymbol{\mu}_* = (\mathbf{A}'_*\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_*)^{-1} \mathbf{A}'_*\mathbf{c}, \\ \Delta\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1})^{-1} \{ \mathbf{1}'(\mathbf{n} - \mathbf{N}\mathbf{p}) - \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{D}_*\Delta\boldsymbol{\mu}_* \} \end{cases}$$

が得られる。ただし、 \mathbf{A}_* , \mathbf{B} , \mathbf{c} (すなわち \mathbf{D}_v , \mathbf{V} , \mathbf{p}) には現在の $\boldsymbol{\mu}$ を用いる。

付録 B. ABIC の導出

付録 (A.1) の $\ell(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2)$ を $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ のまわりでテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2) &\simeq \ell(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \sigma^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \hat{\boldsymbol{\mu}} \partial \hat{\boldsymbol{\mu}}'} \right) (\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \\ &= \ell(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \mathbf{A}' \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A} (\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \end{aligned}$$

のように近似できるから

$$(B.1) \quad f \cdot \pi = \exp\{\ell\} \simeq \exp\{\hat{\ell}\} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}})' \mathbf{A}' \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A} (\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}})\right\}$$

を得る。これを $\boldsymbol{\mu}_*$ について積分することを考える。

一般に、

$$\begin{aligned} \int \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\theta}_1 \\ \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\theta}_1 \\ \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix}\right\} d\mathbf{x}_2 \\ = (2\pi\sigma^2)^{\frac{n_2}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_{22.1}|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\theta}_1)' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\theta}_1)\right\} \end{aligned}$$

だから、 $\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \boldsymbol{\mu}_*$, $n_2 \leftrightarrow M$,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^{11} & \boldsymbol{\Sigma}^{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}^{21} & \boldsymbol{\Sigma}^{22} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{D}_* \\ \mathbf{D}_*' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{D}_*' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{D}_* + \mathbf{D}_s' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_s \end{pmatrix} = \mathbf{A}' \hat{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}$$

のように対応させれば、 $\boldsymbol{\Sigma}^{22} = \boldsymbol{\Sigma}_{22.1}^{-1} = \mathbf{D}_*' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{D}_* + \mathbf{D}_s' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_s$ より

$$\int f \cdot \pi d\boldsymbol{\mu}_* \simeq (2\pi\sigma^2)^{\frac{M}{2}} |\mathbf{D}_*' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{D}_* + \mathbf{D}_s' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_s|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}})^2}{2\sigma^2 \mathbf{1}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{1}}\right\}$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} -2 \log \int f \cdot \pi \, d\mu_* &\simeq (IJ) \log (2\pi\sigma^2) + \frac{\widehat{X}^2}{\sigma^2} + M \log (2\pi\sigma^2) - \log |D'_s S^{-1} D_s| \\ &\quad + \frac{\widehat{\mu}'_* D'_s S^{-1} D_s \widehat{\mu}_*}{\sigma^2} - M \log (2\pi\sigma^2) \\ &\quad + \log |D'_* \widehat{V}^{-1} D_* + D'_s S^{-1} D_s| + \frac{(\mu - \widehat{\mu})^2}{\sigma^2 \mathbf{1}' \widehat{V}^{-1} \mathbf{1}} \end{aligned}$$

である。これが最小になるように μ と σ^2 を選べばそれぞれ $\widehat{\mu}$ と

$$\widehat{\sigma}^2 = (\widehat{X}^2 + \widehat{\mu}'_* D'_s S^{-1} D_s \widehat{\mu}_*) / IJ$$

にすればよいから

$$\begin{aligned} \min_{\mu, \sigma^2} -2 \log \int f \cdot \pi \, d\mu_* &\simeq (IJ) \log (2\pi\widehat{\sigma}^2) + \frac{1}{\widehat{\sigma}^2} (\widehat{X}^2 + \widehat{\mu}'_* D'_s S^{-1} D_s \widehat{\mu}_*) \\ &\quad - \log |D'_s S^{-1} D_s| + \log |D'_* \widehat{V}^{-1} D_* + D'_s S^{-1} D_s| \end{aligned}$$

となる。結局、ABIC は定数項を適当に無視して (3.5) のように得られる。

参 考 文 献

- 赤井豊秋, 渋谷政昭 (1985). 年度, 年齢, 世代の効果をもつ線形模型, 応用統計学, **14**, 1-13.
- Akaike, H. (1980). Likelihood and the Bayes procedure, *Bayesian Statistics* (eds. J.M. Bernardo, M.H. DeGroot, D.V. Lindley and A.F.M. Smith), 143-166, University Press, Valencia.
- Fienberg, S.E. and Mason, W.M. (1978). Identification and estimation of age-period-cohort models in the analysis of discrete archival data, *Sociological Methodology 1979* (ed. K.F. Schuessler), 1-67, Josey-Bass, San Francisco.
- Glenn, N.D. (1977). *Cohort Analysis*, Sage Publications, Beverly Hills and London (藤田英典 訳『コホート分析法』, 朝倉書店, 東京).
- Hirotsu, C. (1988). A class of estimable contrasts in an age-period-cohort model, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **40**, 451-465.
- Holford, T.R. (1983). The estimation of age, period and cohort effects for vital rates, *Biometrics*, **39**, 311-324.
- 石井健一 (1984). コホート・モデルの不定解の一つの表現とその応用, 応用統計学, **13**, 31-36.
- Mason, W.M. and Fienberg, S.E. (eds.) (1985). *Cohort Analysis in Social Research*, Springer, New York.
- Mason, K.O., Winsborough, H.H., Mason, W.K. and Poole, W.K. (1973). Some methodological issues in cohort analysis of archival data, *American Sociological Review*, **38**, 242-248.
- 宮野 勝 (1983). 年齢, 時代, 世代の効果の識別についての一考察〜リッジ回帰適用の試み, 北海道大学文学部紀要, **32**, 67-95.
- 中村 隆 (1982). ベイズ型コホート・モデル——標準コホート表への適用——, 統計研彙報, **29**, 77-97.
- Nakamura, T. (1986). Bayesian cohort models for general cohort table analyses, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **32**, 353-370.
- 中村 隆 (1989). 継続調査によって社会の変化を捉えるコホート分析の方法, 理論と方法, **4**, 5-23.
- Nelder, J.A. and Pregibon, D. (1987). An extended quasi-likelihood function, *Biometrika*, **74**, 221-232.
- Ryder, N.B. (1965). The cohort as a concept in the study of social change, *American Sociological Review*, **30**, 843-861.
- 丹後俊郎 (1984). コホート分析における年齢, 時代, 出生コホートの3効果の推定について, 応用統計学, **13**, 11-26.
- 丹後俊郎 (1985). 年齢, 時代, コホートの3効果の推定——線形成分と非線形成分への分解——, 応用統計学, **14**, 45-59.

- 丹後俊郎, 倉科周介 (1987). Age-period-cohort model に基づく日本の主要死因死亡の変遷の分析 —— 昭和初期世代の特異性の検討を中心として ——, 応用統計学, **16**, 23-42.
- Wedderburn, R.W.M. (1974). Quasi-likelihood functions, generalized linear models and the Gauss-Newton method, *Biometrika*, **61**, 439-447.
- 山田 茂 (1992). 国勢調査結果の評価の試み, 中央調査報, No. 421, 1-7.

Bayesian Logit Cohort Models with Age-by-period Interaction
Effects and an Over-dispersion Parameter and Their
Application to the Data from the Study of
the Japanese National Character

Takashi Nakamura

(The Institute of Statistical Mathematics)

This paper presents a model selection scheme for Bayesian logit cohort models with age-by-period interaction effects and an over-dispersion parameter to analyze longitudinal social survey data. The models considered include a no-effect (μ^-) model, three one-effect (Age-, Period-, and Cohort-) models, three two-effect (AP-, AC-, and PC-) models, a three-effect (APC-) model, and four interaction-effect ([AP]-, [AP]P-, [AP]C-, [AP]PC-) models, each of which has a variant model with an over-dispersion parameter based on the extended quasi-likelihood function. The assumption that successive parameters change gradually is made to overcome the identification problem in cohort analysis and then the optimal model is selected by using a minimum ABIC (Akaike's Bayesian information criterion) procedure. Some data sets from the study of the Japanese national character are analyzed to show the practical utility of the presented scheme in cohort analysis. Appendices give the procedure of parameter estimation and the derivation of ABIC where an over-dispersion parameter exists.