統計数理（1996）
第44巻 第2号 275-284



**研 究 会 報 告**

# 乱流の統計理論とその応用

平成7年度 統計数理研究所 共同研究（7-共会-8）

開　催　日：1995年11月13日～14日
研究代表者：岡崎　　卓（統計数理研究所）
　　　　　　中内　紀彦（東邦大学　医学部）
　　　　　　後藤　俊幸（名古屋工業大学）

乱流現象に潜む統計法則の解明と理工学への応用を目指す本研究会では，下記11講演を中心に質疑討論が行われた．これらの講演は，流体物性の可変性に配慮した乱流モデルの構成法を柱として，渦や拡散にまつわる伝統的話題と，大自由度力学系の視点から乱流現象の解明を目指す試み（講演3，8，10，11）からなる．

大自由度力学系の話題を講演に加えたのは，近年成熟を見せているカオス理論の成果の吸収を意図したものである．特に，力学系の不安定性の指標であるリヤプノフスペクトルと，乱れのエネルギーの分布を示すエネルギースペクトルとの間に一定の対応関係が存在することを示唆したshell modelの理論は，乱流理論で重要な役割を占めるKolmogoroff spectrumの成立背景に新たな光明を投じた．また講演9は，生物の進化論を組み立てている思想を乱流理論に援用する可能性を探るため特に依頼したものである．

本研究会の規模は大にわたらず小に過ぎず，そのため，各講演は講演者と聴き手との討論のうちに進行し，単に知識・情報の交換に留まらず，自己の研究を一歩進めるうえに有益な着想を各参加者に提供したものと期待される．討論の中で，実験で得られる膨大な情報を整理し，人間の理解し得るimageに描き直し理論にまとめるのが理論家の役割であるとの指摘があった．データから有用な情報を抽出する手段を提供するのは統計科学の役割であり，統計科学者と各分野の理論家がどのように協力すべきかは，今後探求すべき重要かつ魅力的な課題となるものと思われる．

（岡崎　卓）

## プ ロ グ ラ ム

「非平衡SGSモデルの研究」　岡本　正芳（東大・生研）
「非一様圧縮性乱流の密度・膨張相関」　半場　藤弘（東大・生研）
「磁場対流におけるトーラス分岐」　戸次　直明（日大・工）
「成層乱流中における拡散問題」　木村　芳文（名大・理）
「一様回転と剪断流中の渦管」　柳瀬眞一郎（岡山大・工）・河原　源太（愛媛大・工）・田中　満（京都工繊大）・木田　重雄（核融合研）
「乱流予混合火炎の形態分類とその条件」　長谷川達也（名工大・機械）

「一様ストレイン場中の微細渦構造のある厳密解」
石原 卓(富山大・理)・金田 行雄(名大・工)
「乱流間欠性は慣性領域現象か?」 勝山 智男・永田 研一(都立大・理)
「変動環境下での生物進化の数理──環境揺らぎと突然変異の役割──」
石井 一成(名大・情報文化)
「乱流シェルモデルのリヤプノフスペクトル」
山田 道夫(東大・数理科学)・大木谷耕司(広大・総合)
「Minimal 流乱流における streak と渦のダイナミックス」 藤 定義(京大・理)

## 非平衡 SGS モデルの研究

東京大学　生産技術研究所　岡　本　正　芳

乱流現象を研究するため，その支配方程式である Navier-Stokes 方程式を直接数値的に解析する（Direct Numerical Simulation : DNS）には，エネルギー供給を代表する比較的大きなスケールから，乱流特有の慣性小領域を経て，分子粘性によりエネルギー消散が行われている小さなスケールまで分解可能な解析格子が必要になる．そのため現在の計算機の能力では大きなレイノルズ数の流れに対してのDNSの適用は非常に困難である．そこで，近年フィルター操作を導入し大きなスケールの渦（GS スケール）に関してのみ直接解析し，小さなスケール（SGS スケール）に関してはモデル化（SGS モデル）を行い比較的大きなレイノルズ数の流れを解析する Large Eddy Simulation（LES）が開発されてきた．

LES でのモデル化は，平均量のみを取り扱うアンサンブル平均型のモデル化とは異なり，乱流において比較的普遍性があると考えられている慣性小領域中で行われる．そのため SGS モデルは各種流れ場に依存しないことが期待されてきた．しかしながら，最も基本的な SGS モデルである勾配拡散型のスマゴリンスキーモデルで，モデル定数が一様減衰流で 0.2，Mixing Layer で 0.15，チャンネル流で 0.1 といった流れ場に依存することが近年までに確認されてきた．

本研究ではこの流れ場依存性がスマゴリンスキーモデル導出の際に使われる SGS エネルギーの輸送方程式中で生成項＝散逸項の仮定，つまり時間微分項を無視できるとする考えに問題があるとして，TSDIA（two-scale DIA）を用いて非定常性を特徴付ける Lagrange 時間微分項をスマゴリンスキーモデルに補正項として導入した非平衡モデルを提案した．さらにこのモデルを用いて先に挙げた一様減衰流，Mixing Layer，チャンネル流の 3 つの流れ場の解析を実際に解析した．

結果として，Mixing Layer，チャンネル流を同時に最適化されたスマゴリンスキーモデル程度に解析できるモデル定数系をいくつか得ることはできたが，一様減衰流と Mixing Layer を同時に満足するモデルを得ることはできなかった．そこで今後は研究対象を SGS エネルギーの輸送方程式を実際に解析する 1 方程式 SGS モデルへ発展させ，この問題の解消を目指す予定である．

## 非一様圧縮性乱流の密度・膨張相関

東京大学　生産技術研究所　半　場　藤　弘

航空機まわりやエンジン内の高速流を正確に計算するには圧縮性の乱流モデルが必要となる．圧縮性流れは非圧縮性流れに比べると現象が多様であり，多くの物理量やパラメータを含んでいるので，圧縮性の乱流モデルは非圧縮性のモデルほど研究が進んでいない．現在は非圧縮性乱流モデルに圧縮性の効果を導入しいくつかの流れ場でモデルが試されつつある．また圧縮性乱流の直接数値計算のデータを用いてモデルを改良する試みもなされている．一様等方流や一様剪断流は基本的な流れ場であるが，非定常なので乱流統計量が初期値に依存する点や空間的な非一様性の効果が入らない点を考慮する必要がある．また衝撃波を通過する流れの計算では衝撃波近くで物理量が大きく変化し必ずしも十分な乱流統計量は得られていない．

そこで本研究では擬スペクトル法を用いた一様等方流の計算に適切な外力を導入し，定常な

乱流場を計算した．外力は$x$方向にのみ依存するので，得られた速度場は$y, z$方向について統計的に一様となる．非圧縮性成分の外力を加えた場合と圧縮性成分と非圧縮性成分の外力を加えた場合の二つのケースを計算し，それぞれ$y, z$平面と時間について平均をとり，乱流エネルギーや密度分散などの種々の乱流統計量を求めた．その結果，乱流エネルギーのピークの位置はエネルギー生産に寄与する平均速度勾配のピークの位置より下流に少しずれており，乱流エネルギーの収支式の各項を調べると移流効果が重要であることがわかった．また圧力・体積膨張相関の分布と密度・体積膨張相関の分布が類似していることや，密度分散の収支式で密度・体積膨張相関項が重要なこと，また密度・体積膨張相関の収支式では二つの項が卓越しつりあっていることなどがわかった．そして密度・体積膨張相関のモデル化を考察した．密度・体積膨張相関の分布は正負両方の値をとり，二つの正のピークを持つ．この分布を説明するには吉澤によって提案されたモデルに加え，平均速度勾配の2乗の項または圧縮性の散逸率の項が必要であることを示した．

## 磁場対流におけるトーラス分岐

日本大学 工学部 戸次 直明・唐木沢孝夫

少数自由度散逸系におけるカオス研究のこう矢（鏑矢）としては，ローレンツモデル（Lorenz (1963)）を挙げることができる．ローレンツモデルによって明らかにされているように，確かに，カオスの発生には，必ずしも基本に線形周期解が存在する必要はない．しかし，このことが強調されるあまり，線形周期解と関連した周期解からカオスへの分岐という重要な点が見落とされてきたきらいがある．

外部磁場のあるプラズマのベナール対流を磁場対流（Weiss (1981)）と呼ぶことにすると，磁場対流は，太陽黒点付近のグラニュールの運動や磁場閉じ込め方式による高温プラズマの異常輸送現象等と密接に関係していると考えられる．又，磁場対流は，電子（イオン）温度勾配によるプラズマ乱流（Horton et al. (1990)）のみならず，抵抗性インターチェインジモードによる乱流，化学反応系，回転流体系，二成分混合溶液の対流，等と類似点が多い．磁場対流の場合は，2次元ベナール対流の場合と違って，磁気プランドル数が小さいとき，静止解からのHopf分岐（線形周期解）が存在する．この点がローレンツモデルと本質的に異なる．

二次元ブシネスク磁場対流を記述する非線形偏微分方程式系を，Hopf分岐点近くで摂動展開すると，非線形項を含む5モード常微分方程式系（fifth-order-system）に逓減できる．この切断5モード常微分方程式系は，磁場無しの極限で，ローレンツモデルになる．Shil'nikov (1993)は，非常に大きいレイリー数に対するローレンツモデル，即ち，Shimizu-Morioka (1980) モデルを使って，ローレンツ型アトラクターの分岐を調べ，Rucklidge (1993)は，小さいアスペクト比の磁場対流の場合に於けるローレンツ型アトラクターの分岐を調べた．我々は，ローレンツ型アトラクターの分岐よりも線形周期解からカオスへの分岐という点に興味があるので，磁気プランドル数が十分小さい場合を考える．この場合，切断5モード常微分方程式系を余次元2分岐点近くで摂動展開すると，TakensやBogdanov達が調べた余次元2分岐における標準形方程式に帰着できる．余次元2分岐点の近くではMelnikovの方法がその標準形方程式に適用できて，実際，我々は，最近，磁気プランドル数が十分小さい場合，解析的にMelnikovの方法によって求めた結果とfifth-order-systemを数値的に積分して得られた結果とを比較すると，かなり良い一致がみられることを示した（Bekki and Karakisawa (1995)）．

ここでは，磁場対流の場合における，トーラスからカオスへの分岐について調べた結果につ

いて報告する．ローレンツモデルにはトーラスからカオスへの分岐は存在しないし，少数自由度の常微分方程式系におけるトーラスからカオスへの分岐を示す例は今までほとんどなかった．我々のモデルは，あるパラメーター領域で，レイリー・ベナール対流の実験が示すポアンカレ断面におけるトーラスのB構造を再現して，トーラスからカオスへの分岐を示す．

## 参考文献


Bekki, N. and Karakisawa, T. (1995). Bifurcations from periodic solution in a simplified model of two-dimensional magnetoconvection, *Physics of Plasma*, **2**, 2945-2962.

Horton, W., Hong, B. G., Tajima, T. and Bekki, N. (1990). Short wavelength drift wave turbulence driven by electron temperature gradient, *Comments to Plasma Physics and Controlled Fusion*, **13**, 207-217.

Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow, *Journal of Atmospheric Science*, **20**, 130-141.

Rucklidge, A. M. (1993). Chaos in a low-order model of magnetoconvection, *Physica D*, **62**, 323-337.

Shil'nikov, A. L. (1993). On bifurcations of the Lorenz attractor in the Morioka-Shimizu model, *Physica D*, **62**, 339-346.

Shimizu, T. and Morioka, N. (1980). On a bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model, *Phys. Lett. A*, **76**, 201-204.

Weiss, N. O. (1981). Convection in an imposed magnetic field, *J. Fluid Mech.*, **108**, 247-272.


# 成層乱流中における拡散問題

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　木　村　芳　文

大気や海洋などの自然界における流れは多くの場合安定な密度成層を形成している．そういった流れの中において物質がどのように拡散するかは環境科学において非常に基本的な問題である．乱流の統計理論の視点から見ると，成層流中における乱流拡散の特徴を理解することが最大の関心事である．これは数理学的興味の対象であるのと同時に気象や海洋予報におけるLESモデルの評価や改良に欠かせない情報を提供するという意味で極めて重要な問題であるといえる．

ここではこの問題をBousinesq近似の規格化された非圧縮のNavier-Stokes方程式，

$$(\partial_t-\nu\nabla^2)\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\nabla p+\theta\hat{z}$$
$$(\partial_t-\kappa\nabla^2)\theta=-N^2w-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$$

($u, v, w$ は $x-, y-, z-$ 方向の速度成分，$\theta$ は温度攪乱）を擬スペクトル法を用いて解き数値的に考察する．拡散の特徴をつかむために多数のLagrange粒子の軌跡を3次のスプライン法を用いて計算しそれらに対する絶対および相対拡散等の統計量を計算する．直感的に言って安定な密度成層は乱流を2次元化し，その結果として鉛直方向の拡散が抑制される．成層の強さを表わすパラメーター$N$（浮力振動数）に応じて鉛直方向の拡散がどのように抑えられるかを調べ，それを説明するために速度および温度場に対してのLangevin方程式によるモデルを提案した．Langevin方程式においては線形項の係数である乱流散逸率の決定が重要な問題でありそれについての考察を行った．

## 一様回転と剪断流中の渦管

岡山大学 工学部 柳 瀬 眞 一 郎
愛媛大学 工学部 河 原 源 太
京都工芸繊維大学 田 中 満
核融合科学研究所 木 田 重 雄

剪断乱流中には，流れの方向に向いた管状の渦構造（縦渦構造）が存在することはよく知られている．この縦渦構造は，平均流と乱流渦との間のエネルギー輸送において非常に重要な役割を果たしていると考えられている．また同時に渦管自身が渦度の引き延ばし・排除によって平均流の渦度を都合よく取り込むことによって自分自身を成長させたり，子渦を再生産している．最近の直接数値シミュレーションの結果を見ると，多くの縦渦構造は流れの方向に対してスパン方向への傾きを持ち，構造内の渦度のスパン方向成分が平均流の渦度と平行（cyclonic）になる場合と反平行（anticyclonic）になる場合とがあることが明らかとなっている．なお，cyclonic, anticyclonic 等の呼び方は，一様回転系での渦管に対する呼称を一様シアーによる渦度に対しても流用している．しかし，縦渦のスパン方向への傾きと乱流エネルギーの発生との関連性，および cyclonic あるいは anticyclonic な傾きが縦渦運動による渦層の形成過程に及ぼす影響については明らかにされていない．本研究はこの問題を最も簡単化された理論的モデルを用いて解析的及び数値的に解明しようとする試みである．

一様シアー流中に無限に長い渦管を考える．渦管が管軸方向に一様であると仮定すると，渦管は一様流によって，受動的に流されることが分かる．シアー流の流れる方向を $x$ 軸，シアー流の速度の増加する方向を $y$ 軸と取る．渦管が $x$ 軸となす角度を $\alpha(0\leq\alpha\leq\pi/2)$，渦管と $x$ 軸によって作られる面と $x$-$y$ 面のなす角度を $\beta(-\pi/2\leq\beta\leq\pi/2)$ とする．渦管はシアーによって受動的に流されるので，$\beta$ は一定に保ちながら，$\alpha$ は次第にゼロに近づく．渦管軸方向の渦度は $x$ の正方向を向いているとすると $\beta>0$ の渦管は anticyclonic, $\beta<0$ の渦管は cyclonic となる．初期に無限に細い渦管を考えその時間発展の初期の様子を Reynolds 数が非常に大きい場合に調べた結果によれば，以下のようなことが明らかとなった．

1) 渦管に垂直方向の絶対渦度は渦管内でほとんどゼロとなる．これを垂直渦度の排除機構と呼ぶ．
2) 渦管に平行な方向の渦度は cyclonic な渦では強く増幅されるが，anticyclonic な渦では増幅は弱くなる．従って，実際に観測される渦は cyclonic 渦が多いことが予想される．
3) 渦管の周辺領域に渦管中心部とは逆方向を向いた渦度の領域が発生する．
4) 垂直渦度は渦管の周辺部でスパイラル状に存在する．

最後に，系に一様回転を加えた場合，一様シアーの渦度と一様回転の渦度が互いに相殺する場合には，cyclonic 渦と anticyclonic 渦の間の渦管方向の渦度の成長の差がなくなることも解析結果からわかった．

## 乱流予混合火炎の形態分類とその条件

名古屋工業大学 長 谷 川 達 也

予混合火炎とは燃料と酸化剤があらかじめ混合された気体中を伝播する火炎のことで，乱れ

のない場合には火炎の厚さと燃焼速度はその混合気の物性値として与えられる．乱流予混合火炎はガソリンエンジンやジェットエンジン，工業炉などの燃焼に見られ，実用上も重要な燃焼形態である．実験によれば，流れの乱れ強さと乱れスケールに依存して乱流予混合火炎の構造が変化することが知られている．乱れが弱くスケールも大きいときは予混合火炎は凹凸になるだけであるが，乱れが強くスケールも小さいときには，乱流輸送に影響された厚くなった火炎が形成され，燃焼速度も速くなる．このような火炎形態の変化を乱流の特性と予混合火炎の特性から分類する研究が約 10 年前に行われた（Borghi (1985), Peters (1989)）．

パラメータとして乱流レイノルズ数 $Re$，乱流ダムケーラ数 $Da$（乱流の時間スケールと燃焼の時間スケールの比），乱流カルロビッツ数 $Ka$（燃焼の時間スケールとコルモゴロフスケール渦の時間スケールの比で，火炎の局所伸張率を表す），乱れ強さと層流燃焼速度の比 $u'/u_F$ を取ると，$Re<1$ は層流火炎，$Re>1$ は乱流火炎，$Da<1$ は反応時間が乱流輸送時間よりも大きい遅い反応，$Da>1$ は早い反応，$Ka<1$ は弱い火炎伸張，$Ka>1$ は強い火炎伸張による消炎の発生，$u'/u_F<1$ はしわ状火炎，$u'/u_F>1$ は渦の巻き込みによる既燃気体や未燃気体のポケットの出現を意味する．

以上のパラメータの組合せによって乱流予混合火炎が以下のように分類される．（I）$Re<1$ 層流火炎，（II）$Re>1$, $Da<1$, $Ka>1$, $u'/u_F>1$ 厚い火炎，（III）$Re>1$, $Da>1$, $Ka<1$, $u'/u_F<1$ しわ状火炎，（IV）$Re>1, Da>1, Ka<1, u'/u_F>1$ ポケットを伴うしわ状火炎，（V）$Re>1, Da>1, Ka>1, u'/u_F>1$ 厚いしわ状火炎．これらの燃焼形態は燃焼速度と乱れ強さの比，火炎の厚さと乱れの積分スケールの比をそれぞれ縦軸と横軸に取り，$Re=1, Da=1, Ka=1, u'/u_F=1$ の線を描くことにより，図上の領域として表される．この図はどのような条件でどのような火炎形態が現れるのかを予想する上で有用であるが，乱流の間欠性，乱流の燃焼による変化を考慮していない点に注意する必要がある．現在の乱流予混合火炎の研究においては，直接数値シミュレーションを利用して，乱流の変化も考慮した火炎構造の把握やモデリングの研究が進められている．

## 参　考　文　献

Borghi, R. (1985). On the structure and morphology of turbulent premixed flames, *Recent Advances in the Aerospace Sciences* (ed. C. Casci), 117-138, Plenum, New York.

Peters, N. (1989). Length and time scales in turbulent combustion, *Turbulent Reactive Flows* (eds. R. Borghi and S. N. B. Murthy), 242-256, Springer, Berlin.

# 一様ストレイン場中の微細渦構造のある厳密解

富山大学　理学部　石　原　　卓
名古屋大学　工学部　金　田　行　雄

ナビエ-ストークス（NS）方程式の解として $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)=(ax,by,cz)+\boldsymbol{u}(x,y,t)$（ここで，$a,b,c$ は $a+b+c=0$ を満たす定数，$u_z\equiv 0$）の形を仮定すると，流れ関数 $\psi$ 及び渦度 $\omega=-\Delta\psi$ は

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\omega+ax\frac{\partial}{\partial x}\omega+by\frac{\partial}{\partial y}\omega+\frac{\partial(\omega,\psi)}{\partial(x,y)}=c\omega+\nu\Delta\omega,$$

に従う．$a=b<0$ の場合と $a<0, b=0$ の場合には(1)の非線形項 $J\equiv\partial(\omega,\psi)/\partial(x,y)$ が自動的に 0 となる定常解（NS 方程式の厳密解）が簡単に得られる．

乱流中に局在する渦構造として $J=0$ の場合の定常解を基にした乱流モデルや乱流の微細構造決定には波数空間の non-local interaction が重要と仮定して $J$-項を無視し，$a, b, c$ をランダムとするモデルではエネルギースペクトル $E(k)\propto\exp(-\alpha k^2), (k/k_d\gg 1)$ が導かれる．ここで $\alpha$ は定数，$k_d$ はコルモゴロフ波長である．しかしながら乱流中では一般に $J\neq 0$ であり，$J\neq 0$ であることが乱流の微細構造決定に重要な役割をすると考えられる．そこで，$J\neq 0$ の場合に(1)の厳密解（定常解）を求め，それを基に微細渦構造を調べることが本研究の目的である．

ここでは(1)の定常解として $\psi=xf(y)$ を仮定する．このとき $F(y)=by-f(y)$ が，

$$(2)\qquad F'^2-FF''+2cF'+\nu F'''=-2bc-b^2, \qquad F'(\pm\infty)=b,$$

を満たせば $\psi=xf, \omega=-xf''$ は(1)の厳密解となる．適当なスケール変換の後，(2)は $F'''+2(c/|b|)F'-FF''+F'^2=1+2|b|c/b^2, F'(\pm\infty)=b/|b|$ に帰着する．$c/|b|$ のそれぞれの値に対して $F'(\pm\infty)=b/|b|$ を満たす $F(0), F'(0), F''(0)$ の値を shooting method を用いて定め，それらを各々 $a_0, a_1, 2a_2$ として $F=\sum_{n=0}^{\infty}a_n y^n$ の展開係数 $a_n(n\geq 3)$ を求めた．$a_n$ の $n\to\infty$ の漸近的な振る舞いを調べた結果，複素平面における $F$ の主要な特異点が求まり，これにより，$u_y(y)=-f(y)$ のフーリエ変換 $\hat{u}_y(k_y)$ が，バーガース渦($J=0$)の場合と違って，高波数で指数的に減衰することがわかった．また，$\psi=xf(y,t)$ として非定常問題を数値的に解いた結果，上で求めた定常解が安定に存在する $c/|b|$ の値の領域を見つけることもできた．上記のような指数的減衰は，乱流の準正規近似やラグランジュ的くりこみ近似，及び最近の直接シミュレーションの結果とも一致するものである．

## 乱流間欠性は慣性領域現象か？
## ～乱流速度信号の Gabor 変換解析～

東京都立大学　理学部　勝山　智男・永田　研一

乱流間欠性は 1949 年の Batchelor らの先駆的研究以来，実験的見地からは，粘性領域の現象であると考えられていた．しかし，Kolmogorov (K41) 理論の流れをくむスケーリング理論の発展により，最近では間欠性をスケーリング理論の枠組みの中で議論することが一般的になってきた．スケーリング理論では，K41 理論からのスケーリング指数のずれ(anomalous scaling)が，すなわち間欠性の現れであるとみなされる（Anselmet et al. (1984)）．この立場に立って，マルチフラクタルな幾何学を用いた間欠性の説明が試みられてきた．

乱流速度変動のバンドパス信号は，anomalous scaling を示す．このことは，バンドパス信号の確率密度関数（PDF）が中心周波数に依存して変化することを意味する（Katsuyama et al. (1994)）．PDF は低周波数ではガウス型であるが，中心周波数の増大に伴ってガウス型からずれてくる．このずれは，粘性領域においてきわめて顕著となる．したがって，間欠性は，古く実験家が指摘した通り，基本的には粘性領域の現象であると考えて良いであろう．このことを考えると，間欠性を非粘性のスケーリング理論の枠組みの中だけで理解しようとすることに疑問が生じる．anomalous scaling は真に慣性領域の現象なのであろうか．粘性領域間欠性は anomalous scaling とどう関わっているのか．こうした疑問に答えるために，粘性領域周波数成分と慣性領域周波数成分を明確に分離して間欠性およびスケーリング的性質を調べた．

この目的に適した tool として Gabor 変換がある(Katsuyama et al. (1995))．Gabor 変換は，

広範囲の周波数分解能を実現できる数値的バンドパスフィルターで，分解能は電気的フィルター同様 $Q$ 値で表される（$Q$ が大きいほど分解能が良い）．我々は，この Gabor 変換を用いて，様々な分解能で間欠性の周波数依存性を測定した．測定はジェット乱流（$R_\lambda=270$）に対して行われた．解析されたすべての $Q$ 値（$2\leq Q\leq 89$）において，anomalous scaling が観測された．スケーリング指数の K41 則からのずれは，$Q$ 値の増大に伴い単調に減少した．

一方，Gabor 変換信号の間欠度（信号を on/off 信号としてとらえたときの on の時間割合）は flatness の逆数によって評価される．$Q$ が大きい場合には，間欠度は慣性領域では一定で，粘性領域になると急激に低下し，慣性領域と粘性領域は明確に分離される．一方 $Q$ が小さい時には，間欠度は慣性領域内で低下しはじめ，慣性領域と粘性領域は明確に分離されない．このことは粘性領域の間欠性が $Q$ の小さなフィルターを通して慣性領域での解析に紛れ込んでしまうことを示唆する．

以上の結果から，次の結論が導かれた．

(1) 間欠性は基本的には粘性領域現象であり，速度変動信号の上では，時間スケールの短いパルス的変動として現れる（Nagata and Katsuyama (1995)）．
(2) $Q$ 値の小さいフィルターを用いたスケーリング解析は，粘性領域の間欠性による汚染を受ける．anomalous scaling は，この汚染の結果である．
(3) 無限に広い慣性領域を持つ（$R_\lambda=\infty$ の）乱流では，粘性領域間欠性による汚染は無視できるので，anomalous scaling は Kolmogorov scaling に非常に近いものとして観測される．すなわち，慣性領域には，厳密な意味において，anomalous scaling は存在しないと考えられる．

## 参　考　文　献


Anselmet, F., Gagne, Y., Hopfinger, E. J. and Antonia, R. A. (1984). High-order velocity structure functions in turbulent shear flows, *J. Fluid Mech.*, **140**, 63-89.

Batchelor, G. K. and Townsend, A. A. (1949). The nature of turbulent motion at large wavenumbers, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **199**, 238-255.

Katsuyama, T., Horiuchi, Y. and Nagata, K. (1994). Intermittency and scaling property of band-pass-filtered signals in moderate Reynolds number turbulent flows, *Phys. Rev. E*, **49**, 4052-4059.

Katsuyama, T., Inoue, M. and Nagata, K. (1995). Gabor transform and intermittency in turbulence, *Phys. Rev. E*, **51**, 5571-5576.

Nagata, K. and Katsuyama, T. (1995). Intermittency effects inherent in turbulence, *Phys. Rev. E*, **52**, 2546-2548.


# 乱流シェルモデルのリヤプノフスペクトル


東京大学　数理科学研究科　山 田 道 夫

広島大学　総合科学部　大 木 谷 耕 司


シェルモデル（Yamada and Ohkitani (1987)）は 3 次元乱流の統計性質をモデル化する目的で提案され，比較的低次元（30 次元程度）のカオス状態において現実の乱流に似た統計性質を示すことが確認されている．このモデルの特徴は，乱流統計とストレンジアトラクターの関係について数値計算によるアプローチが可能な大きさである点にある．ここでは，ストレンジア

トラクタを記述する量としてリヤプノフスペクトルを取り上げ，伝統的な乱流描像，特に Kolmogorov スケーリング則との関連を議論した．

リヤプノフスペクトルは一般の力学系に対して定義される量で，相空間における軌道の不安定性を表し，ストレンジアトラクタの次元や Kolmogorov エントロピーなどカオスを特徴づける他の基本的諸量とも密接に結びついている．数値結果によると，シェルモデルのリヤプノフスペクトルの大きな特徴は，各リヤプノフ数に対応するリヤプノフベクトルの波数空間におけるサポートに顕著な局在性が見られることである．このため各リヤプノフ数に，それぞれ特定の波数を対応づけることが可能となる．一方伝統的な Kolmogorov スケーリング則によれば波数 $k$ の「渦」の特性時間は $k$ の関数として定まっており，従ってリヤプノフ数(次元は(時間)$^{-1}$)は対応する波数の Kolmogorov 特性時間の逆数で与えられる，と考えることができる．このようにして，慣性小領域の波数に対応するリヤプノフ数を Kolmogorov スケーリング則から導くことが可能となり，例えば，正のリヤプノフスペクトルの高次元における漸近表式を

$$\frac{\lambda_j}{H}=(2^{2/3}-1)2^{-2j/3} \qquad (D\to\infty)$$

のように得ることができる（$H, D$ はそれぞれ Kolmogorov エントロピー，Lyapunov 次元）．この漸近表式は数値実験の結果と良く一致している．この結果は，シェルモデルが，常微分方程式系の高次元カオスでリヤプノフ数の漸近表式が得られる例を与えていることを示している．またこの方法を 3 次元 Navier-Stokes 乱流に適用すると，リヤプノフ数 $\lambda$ の分布関数 $P(\lambda)d\lambda$ として

$$P(\lambda)d\lambda\sim\lambda^{7/2}d\lambda$$

が得られるが，この結果を数値的に検証することは残念ながら現在の計算機の能力では難しい．

## 参 考 文 献

Yamada, M. and Ohkitani, K. (1987). Lyapunov spectrum of a model of 3-dimensional turbulence, *J. Phys. Soc. Japan*, **56**, 4210-4213.