

動的 X11 モデルと非線形季節調整 II

—解析例と考察—

統計数理研究所 尾 崎 統

(1997 年 7 月 受付)

1. はじめに

本論文では尾崎 (1997) で提案したダイナミック統計モデルにもとづく動的 X11 法の有効性を数値例とともに解説する。さらに二つの代表的なダイナミック統計モデルである ARMA モデルと状態空間モデルの関係を見ながら季節調整の意味を考え、非線形季節調整の将来の発展の方向をさぐる。

2. 数 値 例

季節調整のような実用と直に結びついた領域においては手法が数値的に有効か否かのチェックは最も重要である。ことに非線形なモデルを用いる場合は解析的解法はまず不可能で必ず数値的あるいは数値的近似の通過ポイントがある。理論家の論文では用いられる近似のある角度からの理論的整合性を示して、だから有効であるとの結論を導いている場合がしばしば見られるが、それらの妥当性は最終的季節調整の結果の数値的有効性のチェックを受けた後でのみ支持されるべきであろう。多くの非線形近似手法が同時に最終的数値結果において有効性の示される場合は残念ながらごくまれである。

X11 法の特徴を組み込んだモデルと既存の非 X11 型モデルとのパフォーマンスの比較をするためには強い相乗的 (Multiplicative) 性格を示すデータを使うことが望ましい。ここでは我々は図 1 にあるような官庁統計の中の一例を扱う。図 1 のデータはニュージーランドの月毎の海外からの訪問者の数で 1956 年 4 月から 1991 年 1 月までのものである。強い年単位の季節性が見られると同時にその季節的振動幅は年と共に拡大する典型的な相乗的系列のパタンである。また季節変動のパタンも年と共に少しずつ変化しているのが認められる。

尾崎 (1997) において、我々は、タンデム、動的 BAYSEA、パラレルの 3 つの非 X11 型季節モデル、それらをベースにした 3 つの X11 型季節モデル、さらにその変形 X11 型季節モデルの合わせて 9 つの季節モデルを見てきた。これを上記の図 1 のデータにあてはめてみる。推定するパラメータはタンデム型 (尾崎 (1997), (5.2) 式) の場合は観測ノイズ分散 σ_e^2 、トレンドのノイズ分散 σ_u^2 、トレンドの定数パラメータ u_0 、季節成分のノイズ分散 σ_v^2 と 12 次元状態変数の初期値 z_0 の合わせて 16 個、動的 BAYSEA 型では観測ノイズ分散 σ_e^2 、トレンドのノイズ分散 σ_u^2 、トレンドの定数パラメータ u_0 、季節成分のノイズ分散 σ_v^2 と 13 次元状態変数の初期値 z_0 とバランス制御パラメータ ϕ の合わせて 18 個、パラレル型の場合は観測ノイズ分散 σ_e^2 、トレンドのノイズ分散 σ_u^2 、トレンドの定数パラメータ u_0 、6 個の季節成分のノイズ分散 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_6^2$ と 12 次元状態変数の初期値 z_0 の合わせて 21 個である。同じタンデムでも非 X11 型、X11 型、変形 X11 型のあいだではパラメータ数は同じで状態空間モデルの構造が違うという関係になっ

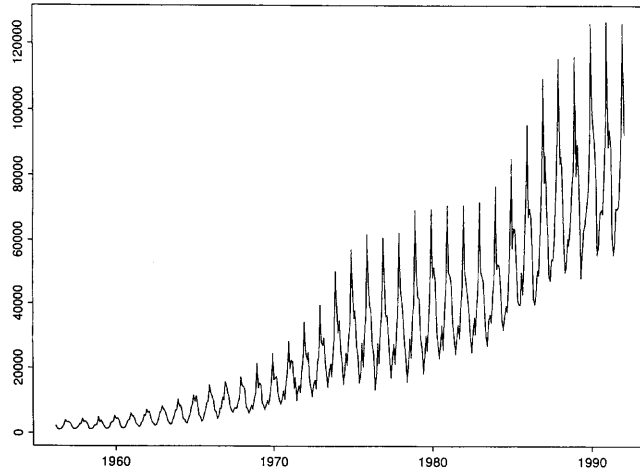


図1. ニュージーランド訪問者数の月毎の時系列データ (1956年4月から1991年1月).

ている。尤度計算をするにあたり状態変数の初期誤差分散-共分散行列 V_0 が必要だが、これに関しては状態の初期値が“良い”値に近いときは V_0 がゼロに近づくにつれごくわずかつ尤度が上がるという経験的事実に基づき、非常にゼロに近い対角行列 0.1×10^{-4} に固定して尤度の最大化計算をおこなった。これらの扱いは多分に経験的な部分があるが、その背後の理論的妥当性の議論などは可能である (Ozaki et al. (1997)などを参照)。

本論文の主要なテーマは「X11的トレンド推定が統計モデルに基づいて出来るか?」であるのでここではまず最初に我々の3つのX11型モデルによる推定トレンドとX11法による推定トレンドを比較してみたい。X11ではデータ Y_1, Y_2, \dots, Y_N を対数変換せずオリジナルのデータ空間でトレンドを出している。一方統計モデルではデータを $y = \log(Y)$ で y_1, y_2, \dots, y_N に変換した後にその変換した空間でトレンドを推定している。したがって統計モデルによる推定トレンドとX11による推定トレンドを比較するため統計モデルによる推定トレンドをすべてオリジナルのデータ空間にもどして議論することにした。統計モデルによる推定トレンドとしてはトレンド $(\log T)_t$ のフィルター推定値 $(\log T)_{t|t}$,

$$\begin{aligned} (\log T)_{t|t} &= E_t[\log T_t] \\ &= \int \log T_t p(\log T_t | y_t, y_{t-1}, \dots, y_1) d(\log T_t) \end{aligned}$$

をとる場合と $(\log T)_t$ の平滑推定値 $(\log T)_{t|N}$,

$$\begin{aligned} (\log T)_{t|N} &= E_N[\log T_t] \\ &= \int \log T_t p(\log T_t | y_N, y_{N-1}, \dots, y_1) d(\log T_t) \end{aligned}$$

をとる場合とが考えられるがここでは世の中の大勢に従って平滑推定値 $(\log T)_{t|N}$ を採用する。ついでながらここで強調しておきたいのは平滑化のよさは基本的には背後にあるモデルとその同定法のいかに“もろに”従属するという点である。稚拙なモデル、あるいは粗末な同定手法で得られた状態空間モデルによる状態のフィルター推定値が平滑化すればよくなるという保証など全くない。平滑化を含めて予測、フィルターなどすべては条件付分布の背後に仮定したモルコフモデルの構造に強く依存する。平滑化によってフィルター推定値より改良したと

してもそれは背後にある稚拙なモデルの限界内でのことである。これは線形状態空間モデルに限らず X11 非線形状態空間モデルを含む全ての状態空間モデルに言えることである。この点を素人だけでなくプロの統計学者にも理解されていない場合が時々見られるのでここで注意しておきたい。

さて X11 トレンドと比べるための我々の統計モデル推定トレンドであるが、推定トレンドを対数変換したデータ y の空間からオリジナルのデータ Y の空間に逆変換した

$$\exp(\log T)_{t|N} = \exp(E[\log T_t | y_N, y_{N-1}, \dots, y_1])$$

を用いる必要がある。(log T) $_t$ の平滑推定値 (log T) $_{t|N}$ は状態 z_t の平滑値 $z_{t|N}$,

$$z_{t|N} = \int z_t p(z_t | y_N, y_{N-1}, \dots, y_1) dz_t$$

から求まり、平滑値 $z_{t|N}$ は前節の局所線形フィルターで求めた状態 z_t のフィルター推定値 $z_{t|t}$ 、状態フィルター誤差分散共分散行列 V_t 、状態予測誤差分散共分散行列 P_t 、状態変数の遷移行列 F_t から通常の線形 smoother の場合と同様にして (たとえば Meditch (1967) 参照) 以下のような帰納的アルゴリズムで効率的に計算できる。

$$\begin{aligned} z_{t|N} &= z_{t|t} + J_t(z_{t+1|N} - z_{t+1|t}) & (t=N-1, N-2, \dots, 2, 1) \\ P_{t|N} &= V_t + J_t(P_{t+1|N} - P_{t+1|t})J_t^T \\ J_t &= V_t F_t^T P_t^{-1} \\ P_{N|N} &= V_N \end{aligned}$$

通常の線形の場合の smoother のアルゴリズムとの違いは V_t, P_t, F_t が状態によって変化し定数でない (F_t は変形 X11 型の時のみ定数でない) ため局所線形フィルターの計算時に得られた $z_{t|t}$ のほかに V_t, P_t, F_t ($t=1, 2, \dots, N$) を貯えておく必要があるという点である。このようにして得られる smoother はしたがって局所線形 smoother と呼ぶのが適当であろう。

図 2, 図 3, 図 4 の実線はそれぞれタンデム, 動的 BAYSEA, パラレルの 3 つの X11 型モデルの推定モデルによる平滑トレンドである。各図において細点線が非 X11 型の対応するモデ

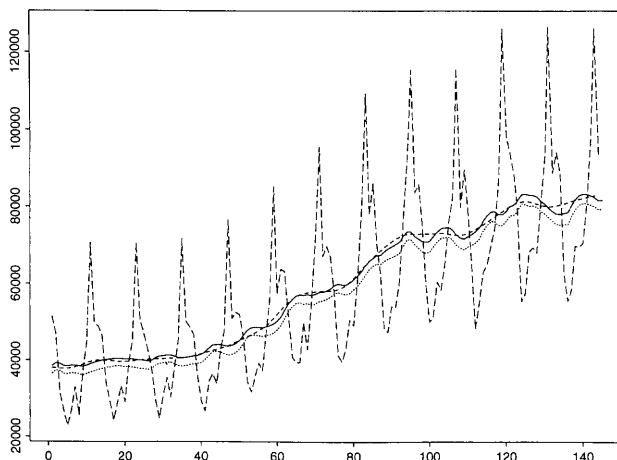


図 2. 線形モデルと動的 X11 非線形モデルによる推定トレンドの比較：タンデム型季節モデルの場合 (実線が動的 X11 非線形モデルによるもの、細点線が線形モデルによるもの、粗点線は X11 法による推定トレンド)。

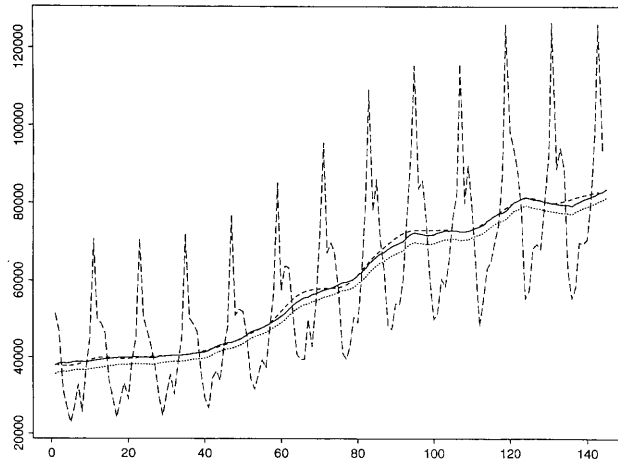


図3. 線形モデルと動的 X11 モデルによる推定トレンドの比較：パラレル型季節モデルの場合（実線が動的 X11 非線形モデルによるもの、細点線が線形モデルによるもの、粗点線は X11 法による推定トレンド）。

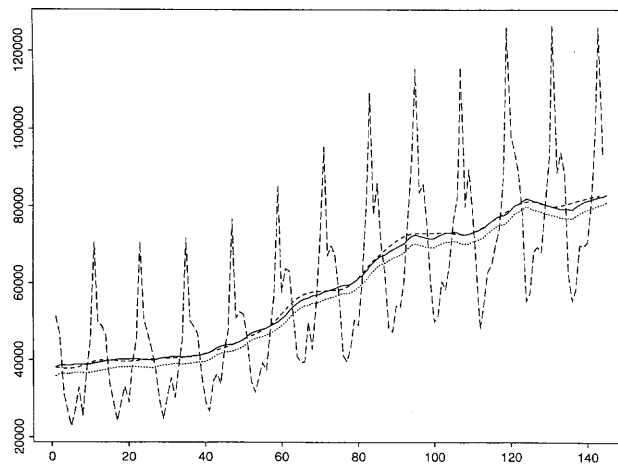


図4. 線形モデルと動的 X11 モデルによる推定トレンドの比較：動的 BAYSEA 型季節モデルの場合（実線が動的 X11 非線形モデルによるもの、細点線が線形モデルによるもの、粗点線は X11 法による推定トレンド）。

ルから得られた平滑トレンド，粗点線は X11 法を用いて適当なチューニングにより得られた推定トレンドを示す。細かい違いを詳しく見るため，各図ではデータの全区間にわたってではなく後半の12年分（1980年2月から1991年1月まで）のみがプロットしてある。

各図で特徴的なのは X11 型統計モデルによる推定トレンドと非 X11 型統計モデルによる推定トレンドの間にははっきりとしたレベルの差がでていることである。これは第一節で述べたように本質的に相加平均と相乗平均の差からくるもので我々が当然出てくるであろうと想定していたものである。同時にプロットした X11 法による推定トレンドはこれが必ずしも一意に決まらないものであることを差し引いても我々の X11 統計モデルの推定トレンドに非常に近く，我々の初期のねらいどおり我々のモデルは X11 法の特徴をよく捉えているということが出来

表 1. 6 つのモデルの (-2) 最大対数尤度.

	線 形	X11 非線形
タンデム	-1600.3	-1601.3
動的 BAYSEA	-1673.6	-1697.5
パラレル	-1689.6	-1708.0

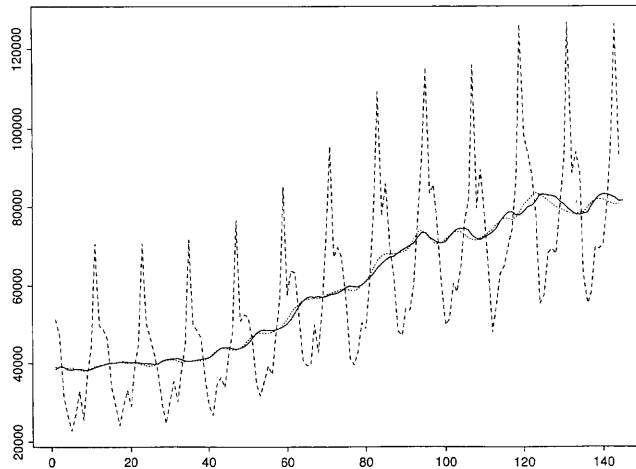


図 5. 動的 X11 モデルと変形動的 X11 モデルによる推定トレンドの比較：タンデム型季節モデルの場合 (実線が動的 X11 モデル推定トレンド，細点線が変形動的 X11 モデル推定トレンド)。

よう。

図 2, 図 3, 図 4 の間を見比べるとこれらはタンデム型, 動的 BAYSEA 型, パラレル型の 3 つの違った季節モデルのそれぞれの特徴をよく示している。面白いことに動的 BAYSEA 型とパラレル型は背後の力学系モデルはまったく異なるにもかかわらず結果が非常によく似ている。いっぽうタンデム型と動的 BAYSEA 型の違いはパラメーター 1 個の差であるが, 結果が大きく違っていて, タンデム型の推定トレンドには局所的上下変動が目立つ。少なくともこのデータに関しては, タンデム型の季節モデルは少し単純化が過剰で季節性の変動に対する縛りの構造がきつ過ぎて, その影響がトレンドのほうにしわ寄せされているようにみえる。表 1 にあるそれぞれのモデルの (-2) 最大対数尤度 (したがってこれに 2 倍のパラメーター数を加えると AIC) の値を比べてもこのことは示されていて, 非 X11 型, X11 型両方とも動的 BAYSEA 型とパラレル型は AIC の値が近く, タンデム型はそれら二つよりかなり悪い値を示している。動的 BAYSEA もパラレルも X11 型にするとあてはまりにかなりの改良が見られたが, タンデム型の DECOMP に関してはほとんど見られなかった。原因はその単純すぎる季節モデルにあるかもしれないが明確な答えを得るためにはもっと多くの多様なデータで比較検討する必要がある。

図 5 は変形 X11 型統計モデルによる推定トレンド (実線) と X11 型統計モデルによる推定トレンド (細点線) をタンデム型についてプロットしたものである。参考のためにこの区間のデータの値をプロットしてある。全体的特徴としては変形 X11 モデルの推定トレンドも X11 モデルの推定トレンド同様 X11 法による推定トレンドとほぼ同じ位置にあり, 非 X11 統計モデルによる推定トレンドのような X11 法の推定トレンドからの明らかな乖離が見られない。X11 統

計モデルとの比較では、状態変数の推定という点だけからはあまり大きな差は見えてこない。むしろ変形 X11 型タンデムモデルのほうが X11 型タンデムモデルよりやや動きが滑らかなように見える。しかし予測誤差の比較、したがって AIC の値の比較では変形 X11 型モデルが圧倒的に悪い(表 3 参照)。このことは裏を返して言えばモデルの優劣の差は予測誤差のパフォーマンスに鋭く現れ、状態推定のパフォーマンスにはそれほど鋭く出ないという解釈もできよう。

3. 動的 X11 モデル推定手法の検証

我々の新しい動的 X11 モデルの有効性を数値例で見てきたが、この新しいモデルは観測式が非線形で、したがってここで本質的に重要な役割を果たしているのは局所線形フィルターである。非線形観測式の状態空間モデルに対する既存の非線形フィルターとしては拡張カルマンフィルターがよく知られているが、これを我々の X11 型統計モデルに適用してその結果を局所線形フィルターの結果と比べてみよう。

拡張カルマンフィルターと我々の局所線形フィルターの違いは形のうえでは尾崎 (1997) の (9.1) の H_k にある。我々の局所線形フィルターでは $H_k z_{k|k-1} = h(z_{k|k-1})$ であるような H_k を使っているのに対し、拡張カルマンフィルターでは $H_k = \{\partial h(z)/\partial z\}_{z=z_{k|k-1}}$ を使う。X11 型非線形観測式では $h(S) = \log(1+S)$ であるから拡張カルマンフィルターの場合これは $H_k S_{k|k-1} = S_{k|k-1}/(1+S_{k|k-1}) \neq \log(1+S_{k|k-1})$ となる。したがって大きな $S_k \rightarrow \infty$ に対しては $\log(1+S_k) \rightarrow \infty$ であるところが $S_k/(1+S_k) < 1$ となる。これは季節成分に対して下方方向に $\log(1+S_k)$ と比べて相対的に強い圧力となって働く。既存の非 X11 統計モデルでは観測式の部分が $h(S) = S$ であるため $S_k \rightarrow \infty$ に対しては線形に $h(S_k) \rightarrow \infty$ であるが $\log(1+S_k) \rightarrow \infty$ の増加のスピードよりも大きい。これは拡張カルマンフィルターの時とは逆に大きな値をとる季節成分に対して相対的に弱すぎる圧力となって働く。この 3 つの観測式での差はトレンド推定に際して意外に大きな効果となって現れる。

図 6、図 7、図 8 は拡張カルマンフィルターを使って推定した X11 型の 3 つの統計モデル、タンデム、パラレル、動的 BAYSEA のそれぞれの推定トレンド(細線)をプロットしたもので

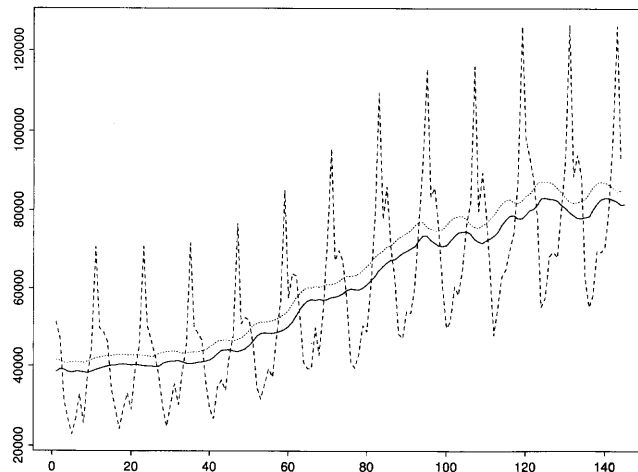


図 6. 拡張カルマンフィルターと局所線形フィルターによる動的 X11 モデル推定トレンドの比較：タンデム型季節モデルの場合（実線が局所線形フィルターによる推定トレンド，細点線が拡張カルマンフィルターによる推定トレンド）。

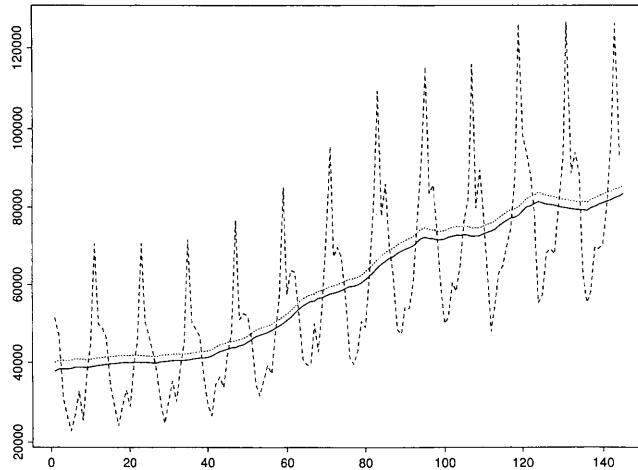


図 7. 拡張カルマンフィルターと局所線形フィルターによる動的 X11 モデル推定トレンドの比較：パラレル型季節モデルの場合（実線が局所線形フィルターによる推定トレンド，細点線が拡張カルマンフィルターによる推定トレンド）。

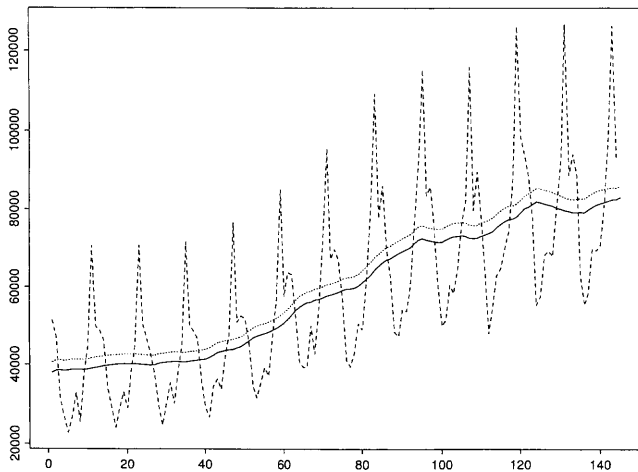


図 8. 拡張カルマンフィルターと局所線形フィルターによる動的 X11 モデル推定トレンドの比較：動的 BAYSEA 型季節モデルの場合（実線が局所線形フィルターによる推定トレンド，細点線が拡張カルマンフィルターによる推定トレンド）。

ある。比較のために図 2，図 3，図 4 の局所線形フィルターによる推定トレンドを実線で示してある。この図から明らかなことは拡張カルマンフィルターでは X11 型トレンドのバイアス（あるいは乖離）の修正の効果が出すぎて非 X11 モデルと逆の方向にトレンドのレベルが大きくなるという点である。図 2，図 3，図 4 では線形なタンデム，パラレル，動的 BAYSEA の推定トレンドが X11 型の下に位置していたのにたいし，拡張カルマンフィルターによる推定トレンドはそれぞれの場合にすべて X11 型トレンドの上に位置している。

もちろんこの図だけから一概に拡張カルマンフィルターの劣勢を結論づけることは出来ないが，X11 法で出した X11 トレンドが図 2～4 で見たように我々の局所線形フィルターによる

X11 統計モデルとほぼ同じレベルに位置していることを考慮すると拡張カルマンフィルターの劣勢は明らかのように見える。局所線形フィルターと比べて予測誤差が悪く AIC の値も大きいということも拡張カルマンフィルターに不利な材料として出ている。したがって X11 型非線形状態空間モデルの推定のための非線形フィルターには本論文で紹介した局所線形フィルターによる方法がその計算効率性も考慮して現時点でもっとも実用に適したものであるといえる。

4. 予測か分解か

季節調整の統計モデルとして本論文では主に状態空間モデルを扱ってきたが、季節調整の時系列モデルの流れとして Box and Jenkins (1970) の ARMA モデル

$$(4.1) \quad \begin{cases} \phi(B)y_t = \theta(B)a_t \\ \phi(B) = (1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p) \\ \theta(B) = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) \end{cases}$$

の存在を忘れるべきでない。白色化によって一般の時系列解析の時と同様 $\phi(B)/\theta(B)$ はデータからユニークに求まる。季節調整の問題が一般の時系列解析の中で特徴的な点は (4.1) のような白色化のモデリングでは満足せず、データ y_t の分解、トレンド成分 T_t 、季節成分 S_t 、ノイズ ε_t への分解

$$(4.2) \quad y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$$

を求める点である。

Akaike and Ishiguro (1980), Akaike (1981) はこれに対しベイズ的アプローチから Box et al. (1978) のモデル

$$(1 + B + B^2 + \dots + B^{11})S_t = \delta_{1,t}$$

と

$$(1 - B^{12})S_t = \delta_{2,t}$$

に関する二つの事前分布及びトレンドの滑らかさに関する事前分布の三つを組み合わせた BAYSEA のモデルを導入した。Kitagawa and Gersch (1984) の DECOMP は BAYSEA から

$$(1 - B^{12})S_t = \delta_{2,t}$$

を除外し Box et al. (1978) のモデルのみを使って状態空間モデルの枠組みの中に組み込んだものであることは前に述べた。

この流れと平行していっぽうでは (4.1) の Box and Jenkins 型のモデルによる予測の良さを追求しつつ何らかの意味でもっとも標準的な分割 (4.2) を探す試みが Hillmer and Tiao (1982) らによって始められ、その活動は信号抽出 (Signal Extraction) アプローチと称していまでも盛んに続けられている (Burman (1980), Bell (1984), Bell and Hillmer (1989))。

予測か分解かは季節調整に本質的につきまとう問題である。ベイズ状態空間アプローチは分解を優先させつつ出来るだけ予測を上げる方向で努力がなされてきている。いっぽう信号抽出アプローチでは予測に直接結びついた ARIMA モデル (ARIMA の I は Integrated を意味し AR 部分の固有根が 1 の場合を特別にわけているが我々はこれを AR の特殊な場合と解釈して AR に含め以下 ARMA モデルということにする) を基本としつつそれと整合性を持つ分解を

求める方向で研究がなされてきた。これら状態空間アプローチと信号抽出 (Signal Extraction) アプローチは主に線形なモデルをめぐってその特徴などが議論されてきているが、我々はこれまでの議論から X11 法のような特徴を持つ統計モデルには非線形なモデルの必要性を見てきた。ここで線形状態空間モデルと信号抽出 ARMA モデルを含む季節調整の時系列モデル全体の関係を整理しておくことは事態が今後複雑な非線形の世界に入った時に発展の方向を見失わないためにも有意義なことであろう。線形状態空間モデルと ARMA モデルとの関係を詳しく見ていくと両者は意外に緊密な関係にあることがわかる。

5. 状態空間モデルと ARMA モデル

ここで我々はまずはじめに状態空間モデルと ARMA モデルを陽に結び付ける以下の関係に注目する。いまデータ y_t にたいし行列 F, G, H によって以下のような状態空間モデル

$$\begin{aligned} z_t &= Fz_{t-1} + Gw_t \\ y_t &= Hz + \varepsilon_t \end{aligned}$$

があるとするとこれは簡単な線形代数の操作によって以下のような ARMA (k, k) 表現に同等であることが示される。

$$\begin{aligned} (5.1) \quad y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_k y_{t-k} & \\ &= H(F^{k-1} - \phi_1 F^{k-2} - \cdots - \phi_{k-1} I)Gw_{t-k+1} + \cdots + H(F - \phi_1 I)Gw_{t-1} + HGw_t \\ &\quad + \varepsilon_t - \phi_1 \varepsilon_{t-1} - \phi_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \phi_k \varepsilon_{t-k} \\ &= (\varepsilon_t + HGw_t) + \{H(F - \phi_1 I)Gw_{t-1} - \phi_1 \varepsilon_{t-1}\} + \cdots \\ &\quad + \{H(F^{k-1} - \phi_1 F^{k-2} - \cdots - \phi_{k-1} I)Gw_{t-k+1} - \phi_{k-1} \varepsilon_{t-k+1}\} - \phi_k \varepsilon_{t-k} \\ &= a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \cdots + \theta_k a_{t-k} \end{aligned}$$

ここに $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ は $k \times k$ 遷移行列 F の特性方程式の係数、 a_t は分散が

$$E[a_t^2] = HG\Sigma_w G' H' + \sigma_\varepsilon^2$$

のようなガウス白色ノイズ。観測誤差 ε_t をゼロと仮定する場合は移動平均 MA の次数は当然 $k-1$ になる。

状態のダイナミックスが

$$z_t = Fz_{t-1} + Gw_t + u_0$$

のように定数ベクトル u_0 を含む場合は

$$(5.2) \quad y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_k y_{t-k} = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \cdots + \theta_k a_{t-k} + c$$

のような定数項 c を含む ARMA モデルになる。すべての MA の係数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ および定数項 c は $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k, \Sigma_w, \sigma_\varepsilon^2$ を使って具体的に表すことができるがここでは省略する。

この式(5.1)または(5.2)から我々は多くの知見を得ることができる。代表的なものを以下に 4 つ挙げる。

- 1) タンデム型非 X11 線形モデルは次の ARMA (12, 12) に等しい。

$$(1 - B^{12})y_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_{12} B^{12})a_t + c$$

ここでは AR の部分の特性多項式の根が単位根、1、と 11 個の 12 カ月季節性に対応する根、

$\pm 2\pi/12, \pm 2\pi/6, \pm 2\pi/4, \pm 2\pi/3, \pm 2\pi/2.4, 2\pi/2$ に固定されており,

$$\phi_1=0, \phi_2=0, \dots, \phi_{11}=0, \phi_{12}=1.$$

また MA の部分の係数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{12}$ が (5.1) 式のように AR の部分の係数によって縛られていて 12 個の係数を定める自由パラメータはノイズ分散, σ_w^2 , 季節モデルのノイズ分散, σ_w^2 と観測ノイズ分散, σ_e^2 の 3 個のみで係数の値には Σ_w と σ_e^2 をとおして入ってくる形になっている。また定数項 c はトレンドの定数項 u_0 と AR の部分の係数によって一意に決まる。

2) パラレル型非 X11 線形モデルは次の ARMA (12, 12) に等しい。

$$(1-B^{12})y_t=(1+\theta_1B+\theta_2B^2+\dots+\theta_{12}B^{12})a_t+c$$

ここでは AR の部分はタンデム型の DECOMP と同じであるが MA の係数に影響する Σ_w の部分の季節成分のノイズ分散のところで $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_6^2$ の 6 個の自由パラメータが入ってくるぶんだけタンデム型より柔軟な形になっている。したがって同じ次数の ARMA モデルであってもタンデム型よりも柔軟性に富んだモデルであるということが出来る。

3) 動的 BAYSEA 型非 X11 線形モデルは次の ARMA (13, 13) に等しい。

$$(1-\phi B-B^{12}+\phi B^{13})y_t=(1+\theta_1B+\theta_2B^2+\dots+\theta_{13}B^{13})a_t+c$$

AR の部分には二つの違った種類の滑らかさに関する縛りの強さの間のバランスをとる目的で導入された自由パラメータ ϕ が一個入った形になっている。13 個の MA のパラメータはタンデム型と同じように (5.1) 式の関係で AR の係数によって縛られていて 13 個の係数を定める自由パラメータはトレンドのノイズ分散, σ_w^2 , 季節成分のノイズ分散, σ_w^2 と観測ノイズ分散, σ_e^2 の 3 つである。

4) ここで注意すべきはタンデム型の DECOMP の AR 部分とパラレル型の AR 部分がまったく同じになるという点である。両者の遷移行列の固有根の集合はまったく同じでその配置が対角上, つまりパラレルになっているかそれとも連鎖型に配置されているかの違いである。実際のデータ解析でどちらがよいかは理論的考察からでてくるような類の問題ではない。データによっては単純なタンデム型モデルがいい場合もあるし, より複雑なパラレルを好む場合もある。両者の中間的な混合型の場合, つまり例えば $\omega_i = \pm 2\pi/12$ に対応する複素固有根のペアが独立な力学系を構成し残りの 9 個の固有根が連鎖型の一つの力学系を構成するモデルなども考えられる。

以上の知見から我々は季節調整の時系列モデルを ARMA モデルのクラスの中に自由度の大きなものから自由度の小さいものまで順番をつけて埋め込むことが出来る。いま ARMA (12, 12) モデルのクラスを考えて自由度の高いものから並べると表 2 のようになる。括弧の中は ARMA モデルのパラメータ数を表す。ただしここでは尤度計算のため必要となる初期値はパ

表 2. ARMA (12, 12) モデル族の関係。

	AR 係数	MA 係数	ノイズ分散	パラメータ数
一般 ARMA	自由 (12)	自由 (12)	自由 (1)	26
AR 半固定 ARMA	半固定	自由 (12)	自由 (1)	21
AR 固定 ARMA	固定	自由 (12)	自由 (1)	14
パラレル型	固定	半固定	半固定	9
タンデム型	固定	半固定	半固定	4

ラメター数の中にカウントしていない。

表 2 で AR 半固定 ARMA の AR 係数が半固定となっているがこれは AR 部の 12 個の固有根の偏角がゼロ, $\pm 2\pi/12, \pm 2\pi/6, \pm 2\pi/4, \pm 2\pi/3, \pm 2\pi/2.4, \pi$ の位置に固定されていて絶対値の大きさのみが自由パラメターになっていることを意味する。また状態空間モデルから導かれた ARMA モデルの MA 係数とノイズ分散が「半固定」となっているがこれは固定された AR の係数とトレンド成分のノイズ分散 σ_u^2 と季節成分のノイズ分散 σ_s^2 と観測ノイズ分散 σ_e^2 によって決まる拘束つきのパラメターであることを意味する。いうまでもなく動的 BAYSEA は同じようにして ARMA (13, 13) のクラスの中に埋め込むことが出来る。

これらの関係は単にモデル族の概念的な整理に役立つだけでなく計算上も有効に利用できる。状態空間モデルの最尤推定の場合、非線形最適化計算のなかでカルマンフィルターの計算を何回も繰り返す必要が出てくる。カルマンフィルターでの大掛かりな行列の積の計算を何回も繰り返すかわりに上記の半固定係数 ARMA モデルによる単純な残差の 2 乗和の最小化によってパラメターを推定し得られた状態空間モデルのパラメターを使って最後にフィルター計算と smoother 計算によって状態のフィルター推定値、平滑推定値を求めると計算量はかなり軽減できる。

これまで季節調整の統計モデルがそれぞれ独立に独自の理由付けとともに導入され、違う統計モデルどうしの関係があまり議論されて来なかった。状態空間表現を用いた季節調整が Harvey のグループを除いてすべてベイズ的議論の枠組みで扱われていることも ARMA モデルアプローチや異なる状態空間モデルどうしの関係から目をそらす原因になっていたかもしれない。思想的違い (ベイズの解釈などの) を強調することが斬新な新しい手法の導入と結びついているあいだはいいが、各手法の違いを包み込んだ新次元への飛躍が期待されている状況では逆に (思想的な違いを強調することが) かえって足を引っ張るマイナスの力として働き得ることを我々研究者は時々思い起こす必要がある。

6. 個人の好みと譲歩の限界

これまで X11 法に近い統計モデルを求めて非線形季節調整の領域に入り込みその中で既存の季節調整統計モデルを比較し、そして再び線形モデルに戻って各モデルの関係を見てきた。ここで我々は再び導入部の季節調整の基本的問いに立ち返って、「季節調整とは何か?」の問題を考えてみたい。表 3 はこれまでに議論してきた 3 つの線形季節調整モデルとその X11 型版季節調整モデル 3 つのほか ARMA (12, 12) モデルの AR 部分を固定したもの、

表 3. 種々の ARMA (12, 12) の (-2) 最大対数尤度とパラメター数 (初期値は除く)。

モデル	(-2) 最大対数尤度	パラメター数
固定 AR 自由 MA	-1740.5	14
X11-パラレル	-1708.0	9
X11-動的 BAYSEA	-1697.5	5
パラレル	-1689.6	9
動的 BAYSEA	-1673.6	5
X11-タンデム	-1601.3	4
タンデム	-1600.3	4
変形 X11 タンデム	-1387.9	4

$$(1 - B^{12})y_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_{12} B^{12})a_t + c$$

や変形 X11 タンデム型モデル等を (-2) 最大対数尤度の小さい順に並べたものである。ここでは尤度計算に必要な初期値はパラメータにカウントしていない。当然予想されたように自由 MA パラメータの (-2) 最大対数尤度は断然他を引き離して小さい値を示している。いうまでもなく (-2) 最大対数尤度が小さいということはモデルによる予測誤差が小さいことを示している。

季節データの解析者は常に最終的にどのモデルを選ぶかの決断を避けてとおれないことを知っている。この場合解析者にとって可能な選択には例えば以下のような5つが考えられる。

A) ARMA (12, 12) モデルのかわりに分解モデルの中で最も AIC の小さい、したがって最も予測パフォーマンスのよさが期待できる X11 型パラレルモデルによる分解を選択すること。

B) 分解成分のベイズ的解釈にこだわり、本来の BAYSEA にもっとも近い動的 BAYSEA による分解を選択すること。

C) ベイズ的解釈を与える分解モデルの中で最もシンプルなかたちのタンデム型モデルによる分解を選択すること。

D) 分解などやめて予測の意味でもっともいいモデル、したがって AIC 最小の係数が全く自由な ARMA モデルを選択すること。

E) とにかく X11 のような分解と成分の推定が得られれば良い、したがって計算の簡単な変形 X11 型のものを選ぶ。データへのあてはまりの悪さは気にしない。

表3はこのような解析者の決断に対するある種の客観的よりどころを与えているとみなせる。解析者 A はデータをトレンドと季節成分に分解したかたちで見たいという自分の好みを予測のパフォーマンスの犠牲 (あてはまりの悪さ) のう上に押しとおしていることを認識すべきである。X11 型パラレルモデルは分解容認型のモデルの中では最もよいあてはまりを示しているが AR 固定 ARMA (12, 12) モデルとくらべると (-2) 最大対数尤度で 30 以上悪いモデルを選んでいるのである。解析者 B, C も同様である。解析者 E はデータのあてはまりの悪さを気にしないといっても AR 固定の ARMA (12, 12) モデルと比べて (-2) 最大対数尤度で 300 以上の差があることを承知の上で変形 X11 モデルを選んでいることを認めなければならない。解析者 D は個人的欲求を押さえたデータに最も忠実な路線であるといえるが現実の官庁統計の現場からはあまり評判は良くないであろう。そこで予測の意味で最もいい ARMA モデルを出発点とし、これと整合性を出来るだけ保つ形の分解を求める Signal Extraction (信号抽出) アプローチが最近再び注目されてきている。しかしこの動きがアナクロニズムに陥る危険と背中合わせであるという点に気がついている季節調整研究者は少ないようにみえる。カルマンフィルターによる信号抽出が可能な今の時代にカルマン (Kalman (1960)) のマルコフ表現を捨てて 1950 年代の一般的ウィナーフィルターに戻って信号抽出したからといってより良いものが得られるとは常識的には考えにくい。

結局季節調整に関わる統計学者として心すべきは季節調整的分解が常に正しいという客観的命題などは存在しないという認識をもちつつも、現場の要求を考慮しつつその要求の実現がいかに現実のデータへの忠誠度を犠牲にした上で成り立っているか (あるいは逆に合理的なものであるか) を明らかにするということではなからうか。特殊で非線形な分解への個人的欲求がいくら強くても現実のデータへのあてはまりをあまりに犠牲にしている場合は躊躇せざるを得ないであろう。「個人の好みの為にデータへのあてはまり (予測) をどこまで犠牲にできるか?」はケースバイケースである。その解析者の決断のためのよりどころを提供する意味でも、あるいはその荒唐無稽さを白日のもとにさらす意味でも X11 法のような手続き的季節調整の手法

を客観的評価の可能な統計的モデルに置き換えることは意義あることである。

7. おわりに

本論文では尾崎 (1997) とあわせて、X11 法の主な特徴を統計的モデルによって実現させることをめざして非線形季節調整法の研究の一端を紹介した。一般的非線形季節調整を支える背後の理論的枠組みと考え方の説明は紙数の都合で大部分割愛せざるを得なかった。これらはまた機会を改めて議論することにした。

本研究の一部は統計数理研究所国際共同研究としてニュージーランド-ヴィクトリア大学、P. J. Thomson 博士と共同で行ったものである。共同研究を支えて下さったヴィクトリア大学、統計数理研究所共同利用委員会、並びにニュージーランド政府統計局に感謝します。

最後に粗雑な原稿に最後まで辛抱強く目を通して有益なコメントをいただいたレフェリーと編集委員諸氏に感謝します。特に統計数理研究所における季節調整研究のパイオニアの一人であり編集委員でもある、石黒真木夫教授の熱意と奔走がなければこの論文が陽の目を見るのは来世紀になっていたかもしれない。

参 考 文 献

- Akaike, H. (1981). Seasonal adjustment by Bayesian modeling, *J. Time Ser. Anal.*, **1**, 1-13.
- Akaike, H. and Ishiguro, M. (1980). BAYSEA, a Bayesian seasonal adjustment program, *Comput. Sci. Monographs*, No. 13, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- Bell, W. R. (1984). Signal extraction for nonstationary time series, *Ann. Statist.*, **12**, 646-664.
- Bell, W. R. and Hillmer, S. C. (1989). Modeling time series subject to sampling error, Statistical Research Division Report Series No. Census/SRD/RR-89/01, Bureau of the Census, Washington, D.C.
- Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco.
- Box, G. E. P., Hillmer, S. C. and Tiao, G. C. (1978). Analysis and modeling of seasonal time series, *Seasonal Analysis of Economic Time Series* (ed. A. Zellner), 309-334, U.S. Dept. of Commerce, Bureau of the Census, Washington, D.C.
- Burman, J. P. (1980). Seasonal adjustment by signal extraction, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A*, **143**, 321-337.
- Hillmer, S. C. and Tiao, G. C. (1982). An ARIMA-model-based approach to seasonal adjustment, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **77**, 63-70.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems, *Journal of Basic Engineering*, **82**, 35-45.
- Kitagawa, G. and Gersch, W. (1984). A smoothness priors state space approach to the modeling of time series with trend and seasonality, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **79**, 378-389.
- Meditch, J. S. (1967). Orthogonal projection and discrete optimal linear smoothing, *J. SIAM Control*, **5**, 74-89.
- 尾崎 統 (1997). 動的 X11 モデルと非線形季節調整 I —モデルと計算法—, *統計数理*, **45**(2), 265-285.
- Ozaki, T., Valdes-Sosa, P. and Ozaki-Haggan, V. (1997). Reconstructing nonlinear dynamics from time series: with application to epilepsy data analysis, Tech. Report 1997/02, University of Manchester/UMIST Manchester Centre for Statistical Science.

Dynamic X11 Model and Nonlinear Seasonal Adjustment II : Numerical Examples and Discussion

Tohru Ozaki

(The Institute of Statistical Mathematics)

A new statistical method for the X11 type seasonal adjustment is checked numerically. All the new models introduced in the paper (Ozaki (1997)) are applied to real data and their performances are checked numerically and compared. The numerical results show that the trend estimate by our model based method is similar to the trend estimate by the X11 method and is quite different from the trend estimate by other conventional model based methods. Finally, by comparing the structure of the two typical models for seasonal adjustment, i.e. ARMA models and linear state space representation models, implication and role of seasonal adjustment in time series analysis of official data are discussed.

Key words: Seasonal adjustment, X11 method, dynamical system, multiplicative series, BAYSEA, dynamic BAYSEA model, parallel model, tandem model, DECOMP, ARMA model, stochastic differential equation, nonlinear filter, local linearization filter, maximum likelihood.