統計数理（1998）
第46巻 第2号 345-358

特集「計算と最適化」
［原著論文］

半無限計画の最適性と双対性

統計数理研究所　伊　藤　　聡

（受付 1998年6月1日；改訂 1998年8月21日）

要　旨

半無限計画は有限次元空間における無限個の制約条件つき最適化であり，このような問題は一般の近似問題，分権システムにおける資源配分，競争状況下での意志決定，多目的最適化，信号処理など工学のあらゆる分野に現われる．また，無限制約式は適当な条件のもとで最適値関数を含む式に等価的に変換され，この意味で半無限計画の理論は階層的最適化に対する基礎を与えるといえる．

本論文では，特に関数解析的な手法を用いて半無限計画問題の最適性条件と双対性について考察する．まず，適当な仮定のもとで制約関数を Banach 空間上に値をとる作用素とみなすことにより，その最適性条件を誘導する．Lagrange 乗数は制約式のインデックス集合上の測度として定義されるが，最適性条件を満たす乗数の集合は，空集合でない限り，必ず有限個の点からなる台を持つ離散測度を含むことを示す．一方，凸計画問題に対しては Slater の制約想定のもとで強双対性が成立することがよく知られている．半無限計画における双対問題はやはりインデックス集合上の測度空間で定式化されるが，Slater の条件のもとではその解集合が最適性条件を満たす乗数の集合と一致することを示し，これにより双対問題の解集合を特徴づける．最後に逆双対性についても考察する．

キーワード：半無限計画，凸計画，最適性条件，Lagrange 乗数，双対性，逆双対性．

1. はじめに

数理計画問題は一般に次のように定式化される．

$$\min_x f(x)$$
$$\text{subj. to}\quad G(x)\leq 0$$

ここで，Xを線形空間，Yを順序線形空間とし，$f:X\to R$, $G:X\to Y$とする．順序は一般に凸錐を定めることにより定義される．すなわちYにおける凸錐Cに対して$y\in C$のとき$y\geq 0$と定義することができる．このように定義された順序は反射律・反対称律・推移律を満たすいわゆる半順序である．順序を定義する錐を順序錐という．X, YおよびYにおける順序を定めると問題の性質がある程度定まる．例えば，$X=R^n$, $Y=R^m$とし，Yにおける順序錐をその第1象限としたものが通常の非線形計画であり，また$X=R^m$, Yをn次対称行列の空間とし，Yにおける順序錐を半正定値行列からなる凸錐としたものが，いまはやりの半正定値計画（semidefinite programming）である．（現在のところ半正定値計画といえばf, Gがともにアフィンである場合をさすのが普通であり，一般の場合は非線形半正定値計画と呼ばれている．）さらに無限次元に目を向ければこのような組み合わせはそれこそ無限に存在する．ところで，最適解の局所的

な振舞いを解析するためには X, Y にノルムなどにより位相を導入する必要がある．有限次元の場合には任意のノルムは等価であるから，どんなノルムを使おうがあまり問題にはならないが，無限次元の場合はそうではない．問題に応じて注意深く空間と位相を定めなければならない．

さて本稿の主題は半無限計画(semi-infinite programming)である．半無限というと X, Y のうちいずれか一方が有限次元で他方が無限次元の場合をさすと考えるのが自然ではあるが，通常 X が有限次元で Y が無限次元の場合を意味することが多い．本稿でもこの場合を取り扱う．ついでながら，X が無限次元で Y が有限次元という場合は，例えば古典的変分法でいう等周問題などに見られるように，数理計画の歴史の中でも最も古い起源を持つ．本稿における半無限計画はしたがって有限次元空間における無限個の制約条件つき最適化であり，このような問題は一般の近似問題，分権システムにおける資源配分，競争状況下での意志決定，多目的最適化，信号処理など工学のあらゆる分野に現われる．また，無限制約式は適当な条件のもとで最適化操作を含む式に等価的に変換され，半無限計画問題は最適値関数を含む階層的最適化問題とみなせる．この意味で，半無限計画の理論は階層的最適化に対する基礎を与えるともいえる．半無限計画について詳しくは Hettich (1979), Krabs (1979), Hettich and Zencke (1982), Fiacco and Kortanek (1983), Glashoff and Gustafson (1983), Anderson and Philpott (1985), Anderson and Nash (1987), Polak (1987), Hettich and Kortanek (1993), Polak (1997), Shimizu et al. (1997), Goberna and López (1998) などを参照されたい．

本稿では一般の非線形半無限計画問題に対して，関数解析的な手法を用いてその最適性条件と双対性について考察する．まず，制約関数のインデックスパラメータに関する連続性およびインデックス集合のコンパクト性を仮定して，インデックス集合上で連続な関数からなる関数空間への作用素として制約関数を再定義する．この関数空間における順序・位相を非負関数からなる錐および一様ノルムで定義して得られる非線形計画問題の最適性条件として Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件を導く．ここで Lagrange 乗数はインデックス集合上の有限な符号つき正則 Borel 測度として定義されるが，KKT 条件を満たす乗数の集合は，空集合でない限り，必ず有限個の点からなる台を持つ測度を含むことを示す．したがって任意の制約想定のもとで，そのような(通常 Haar 測度と呼ばれる)離散測度の存在が保証されることになる．一方，凸計画問題に対しては Slater の制約想定のもとで強双対性が成立することがよく知られている．半無限計画における双対問題はやはりインデックス集合上の有限な符号つき正則 Borel 測度の空間で定式化される．ところで，局所的な KKT 理論と大域的な双対理論は，KKT 条件を満たす乗数の集合と双対問題の解集合が一致するという事実により自然に結びつくが，これより直ちに双対問題の解集合は Slater の条件のもとで必ず離散測度を含むことが導かれる．最後に，逆双対性すなわち双対問題の解からいかに元の主問題の解を求めるかについて，非線形計画に対して知られている諸性質（例えば Mangasarian (1969), Mangasarian and Ponstein (1965), Bazaraa et al. (1993), Hiriart-Urruty and Lemaréchal (1993) を参照）を半無限計画に拡張する．

2. 問題の定式化

以下では次のような半無限計画問題を考える．

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &\min_x f(x) \\ &\text{subj. to}\quad g(x,\omega)\le 0 \qquad \text{for all } \omega\in\Omega \end{aligned}$$

ここで $x\in R^n$, $f: R^n\to R$，また Ω をコンパクトな Hausdorff 空間とし，$g: R^n\times\Omega\to R$ とする．

さらに関数 f および g の凸性および微分可能性を以下のように仮定する.

仮定 1. f は凸であり, g はすべての $\omega \in \Omega$ に対して x に関して凸である.

仮定 2. f は R^n 上で微分可能であり, g はすべての $x \in R^n$ に対し ω に関して連続かつ $R^n \times \Omega$ 上で x に関して連続微分可能である.

Ω 上のすべての連続関数からなる線形空間に一様ノルムを定義することにより得られる Banach 空間を $C(\Omega)$ で表わす. 作用素 $G: R^n \to C(\Omega)$ を

$$G(x)(\omega) \triangleq g(x, \omega) \qquad \text{on } \Omega \tag{2.2}$$

と定義すると, 問題 (2.1) は

$$\begin{aligned} &\min_x f(x) \\ &\text{subj. to} \quad G(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

と書ける. ただし $C(\Omega)$ における順序はすべての非負(あるいは非正)関数からなる錐で与えられるものとする. 作用素 G がこの順序錐に関して凸であること, また問題 (2.3) の許容領域が R^n で凸であることに注意されたい.

3. 双 対 性

Slater の制約想定のもとで凸計画問題 (2.3) に対して強双対性が成立することはよく知られている (Luenberger (1969)) が, この制約想定はいまの場合 g を使って次のように表現される.

仮定 3 (Slater の制約想定).

$$g(x, \omega) < 0 \qquad \text{for all } \omega \in \Omega$$

を満たす $x \in R^n$ が存在する.

Lagrange 関数 $L: R^n \times M(\Omega) \to R$ を

$$L(x, \Lambda) \triangleq f(x) + \langle \Lambda, G(x) \rangle \tag{3.1}$$

と定義する. ここで $M(\Omega)$ は $C(\Omega)$ の双対空間を表わすものとする. 通常これは Ω 上の有限な符号つき正則 Borel 測度の空間として表現され, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は Radon 積分を使って

$$\langle \Lambda, y \rangle = \int_\Omega y(\omega) d\Lambda$$

で与えられる $M(\Omega)$ と $C(\Omega)$ の双対ペアを表わす (Yosida (1980)). このとき主問題 (2.3) に対応する Lagrange 双対問題は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} &\max_\Lambda \min_x L(x, \Lambda) \\ &\text{subj. to} \quad \Lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし $M(\Omega)$ における順序は $C(\Omega)$ の順序錐の双対錐で, すなわち

$$\Lambda \geq 0 \iff \langle \Lambda, y \rangle \geq 0 \qquad \text{for all } y \geq 0$$

により定められるものとする．

強双対定理は以下のように述べられる．

定理4(強双対性)． 仮定1および3が成り立つとする．主問題(2.3)が$x^*\in R^n$で最小値をとるならば，双対問題（3.2）に解$\Lambda^*\in M(\Omega)$が存在し，このとき以下が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&f(x^*)=\min_x L(x,\Lambda^*)\\
&\langle\Lambda^*, G(x^*)\rangle=0\\
&x^*\in\arg\min_x L(x,\Lambda^*)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

証明． 省略．例えばLuenberger (1969) のSection 8.6, Theorem 1を参照．□

Lagrange関数はxに関して凸であるから，仮定2のようにfおよびgの微分可能性を仮定すれば，Lagrange問題$\min_x L(x,\Lambda)$の解集合は任意のΛに対して$\nabla_x L(x,\Lambda)=0$で完全に特徴づけられる．(Gの微分可能性は仮定2のもとで保証される．4節の補助定理5を参照のこと．) すなわち双対問題（3.2）は次のWolfeの双対問題（Wolfe (1961), Mangasarian (1969)）と等価である．

$$
\begin{aligned}
&\max_{x,\Lambda} L(x,\Lambda)\\
&\text{subj. to}\quad \nabla_x L(x,\Lambda)=0,\quad \Lambda\geq 0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

しかし，以下に挙げるような典型的な例を除けば，この変換により元のLagrange形式(3.2)が持つ凹性が失われるため，双対問題をこのような形式で表現することは一般には実用的でない．

ここで，半無限凸計画の特殊だが重要な例として，2次および線形の場合を考える．まず次の半無限凸2次計画問題を考えよう．

$$
\begin{aligned}
&\min_x \frac{1}{2}x^TQx+b^Tx\\
&\text{subj. to}\quad Ax\leq c
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

ただし，$0\leq Q\in R^{n\times n}$, $b\in R^n$, $A\in B(R^n, C(\Omega))$および$c\in C(\Omega)$とし，さらに$Ax<c$を満たす$x\in R^n$が存在するとする（本稿では一般に$A\in B(X,Y)$によりAがXからYへの連続な線形作用素であることを表わすものとする）．ここで制約条件$Ax\leq c$は

$$a(\omega)^Tx\leq c(\omega)\qquad \text{for all } \omega\in\Omega$$

の形の無限制約式を表わす（このとき$(Ax)(\omega)=a(\omega)^Tx$である）．

いま

$$f(x)\triangleq\frac{1}{2}x^TQx+b^Tx,\qquad G(x)\triangleq Ax-c$$

とおけば，

$$
\begin{aligned}
L(x,\Lambda)&=\frac{1}{2}x^TQx+b^Tx+\langle\Lambda, Ax-c\rangle\\
&=-\frac{1}{2}x^TQx-\langle\Lambda, c\rangle+x^T(Qx+b+A^*\Lambda)
\end{aligned}
$$

となる．ただし A^* は A の双対作用素である．ここで

$$\nabla_x L(x, \Lambda) = Qx + b + A^*\Lambda$$

であるから次の Dorn の双対問題（Dorn (1960a, 1960b)）を得る．

$$\begin{aligned}&\min_{x,\Lambda} \frac{1}{2} x^T Qx + \langle \Lambda, c\rangle \\ &\text{subj. to} \quad Qx + b + A^*\Lambda = 0, \quad \Lambda \geq 0\end{aligned} \tag{3.6}$$

（max を min に書き換えたため符号が変わっているが）目的関数が $L(x, \Lambda) - x^T \nabla_x L(x, \Lambda)$ になっている点が Wolfe 形式と異なることに注意されたい．行列 Q が正定のとき，すなわち半無限強凸 2 次計画問題に対しては，さらに

$$\begin{aligned}&\min_{\Lambda} \frac{1}{2} (A^*\Lambda + b)^T Q^{-1} (A^*\Lambda + b) + \langle \Lambda, c\rangle \\ &\text{subj. to} \quad \Lambda \geq 0\end{aligned}$$

と書け，その解 Λ^* に対して主問題の解 x^* は一意に

$$x^* = -Q^{-1}(A^*\Lambda^* + b)$$

で与えられる．

次に線形の場合を考えよう．

$$\begin{aligned}&\min_{x} b^T x \\ &\text{subj. to} \quad Ax \leq c\end{aligned} \tag{3.7}$$

ここで b, A, c は問題（3.5）と同様である．この場合は，双対問題（3.6）において $Q=0$ とおくと，

$$\begin{aligned}&\min_{\Lambda} \langle \Lambda, c\rangle \\ &\text{subj. to} \quad b + A^*\Lambda = 0, \quad \Lambda \geq 0\end{aligned} \tag{3.8}$$

が得られる．

4. 最適性条件

3 節では半無限凸計画に対する大域的な双対性について考察したが，この節では半無限計画における Lagrange 乗数の性質を調べるために局所的な振舞いについて考察する．

まず，次の補助定理は（2.2）式で定義された作用素 G の微分可能性について述べている．

補助定理 5. 仮定 2 が成り立つとする．作用素 $G: R^n \to C(\Omega)$ は連続 Fréchet 微分可能であり，その $x \in R^n$ における導値 $G'(x) \in B(R^n, C(\Omega))$ は

$$(G'(x)s)(\omega) = g_x(x, \omega)s \quad \text{on } \Omega \qquad (\forall s \in R^n) \tag{4.1}$$

で与えられる．

証明. まず G が Gâteaux 微分可能であり，その x における $s \in R^n$ 方向への Gâteaux 微分 $\delta G(x; s) \in C(\Omega)$ が

$$(4.2)\qquad \delta G(x; s)(\omega) = g_x(x, \omega)s \qquad \text{on } \Omega$$

で与えられることを示す．いま $\alpha \in R$ に対して

$$\begin{aligned}\left\| \frac{G(x+\alpha s) - G(x)}{\alpha} - g_x(x, \cdot)s \right\|_{C(\Omega)} \\ &= \max_{\omega} \left| \frac{g(x+\alpha s, \omega) - g(x, \omega)}{\alpha} - g_x(x, \omega)s \right| \\ &= \max_{\omega} |g_x(x+\beta(\alpha, \omega)\alpha s, \omega)s - g_x(x, \omega)s| \\ &\leq \max_{\omega} \|g_x(x+\beta(\alpha, \omega)\alpha s, \omega) - g_x(x, \omega)\| \cdot \|s\|\end{aligned}$$

が成立する．ただし $0 < \beta(\alpha, \omega) < 1$ である．g_x の連続性と Ω のコンパクト性により，$\alpha \to 0$ のとき上式の右辺は 0 に収束する．したがって

$$\delta G(x; s) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{G(x+\alpha s) - G(x)}{\alpha} = g_x(x, \cdot)s$$

すなわち (4.2) を得る．Gâteaux 微分 $\delta G(x; s)$ は明らかに s に関して線形かつ連続，すなわち $\delta G(x; \cdot) \in B(R^n, C(\Omega))$ である．

次に $x^k \to x$ のとき $B(R^n, C(\Omega))$ の強位相で $\delta G(x^k; \cdot) \to \delta G(x; \cdot)$ となることを示す．任意の $s \in R^n$ に対して

$$\begin{aligned}\|\delta G(x^k; s) - \delta G(x; s)\|_{C(\Omega)} &= \max_{\omega} |g_x(x^k, \omega)s - g_x(x, \omega)s| \\ &\leq \max_{\omega} \|g_x(x^k, \omega) - g_x(x, \omega)\| \cdot \|s\|\end{aligned}$$

が成立するから，

$$\begin{aligned}\|\delta G(x^k; \cdot) - \delta G(x; \cdot)\|_{B(R^n, C(\Omega))} &= \sup_{\|s\|=1} \|\delta G(x^k, s) - \delta G(x, s)\|_{C(\Omega)} \\ &\leq \max_{\omega} \|g_x(x^k, \omega) - g_x(x, \omega)\|\end{aligned}$$

を得るが，ここで再び g_x の連続性と Ω のコンパクト性より，$x^k \to x$ のとき $\delta G(x^k, \cdot) \to \delta G(x; \cdot)$ となることがわかる．作用素 G はしたがって連続 Fréchet 微分可能であり，x における導値 $G'(x)$ は $\delta G(x; \cdot)$ に一致する．□

導値 $G'(x)$ の双対作用素を $\nabla G(x) \in B(M(\Omega), R^n)$ で表わすことにする．すなわち

$$(4.3)\qquad \nabla G(x)\Lambda = \int_{\Omega} \nabla_x g(x, \omega) d\Lambda \qquad (\forall \Lambda \in M(\Omega))$$

とする．ここで g_x および $\nabla_x g$ に対しても同様な記法を使っていることに注意されたい．この場合それぞれ n 次元行ベクトルおよび列ベクトルになる．

問題 (2.1) に対する Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件は次のようになる．

定理 6 (KKT 条件)． 仮定 1-3 が成り立つとする．問題 (2.1) が $x^* \in R^n$ において最小値をとるための必要十分条件は，x^* が許容解で

$$(4.4)\qquad \begin{aligned}&\nabla_x L(x^*, \Lambda^*) = \nabla f(x^*) + \nabla G(x^*)\Lambda^* = 0 \\ &\langle \Lambda^*, G(x^*) \rangle = 0, \qquad \Lambda^* \geq 0\end{aligned}$$

すなわち

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} &\nabla f(x^*)+\int_\Omega \nabla_x g(x^*,\omega)d\Lambda^*=0\\ &\int_\Omega g(x^*,\omega)d\Lambda^*=0\\ &\Lambda^*\geq 0 \qquad (\Lambda^* \text{ は正則な Borel 測度}) \end{aligned}$$

を満たす $\Lambda^*\in M(\Omega)$ が存在することである．

証明． 仮定1および2より，任意の $x,\hat{x}\in R^n$ に対して

$$G(\hat{x})\geq G(x)+G'(x)(\hat{x}-x)$$

が成り立つ．仮定3により $G(\hat{x})<0$ を満たす $\hat{x}$ の存在が保証されるから，任意の $x\in R^n$ において Cottle の制約想定が成立する．故に（4.4）を満たす Λ^* が存在する（例えば Luenberger (1969) の Section 9.4, Theorem 1 を参照）．(4.3) 式の表現を用いれば，直ちに（4.5）が得られる．十分性は凸性より明らか（このときは仮定3は不要）．□

KKT 条件を満たす乗数 $\Lambda^*\in M(\Omega)$ は一般には一意ではないが，以下が成立する．

定理 7． 仮定2が成り立つとし，$x^*\in R^n$ は許容解であるとする．このとき KKT 条件(4.4)を満たす乗数の集合は，空集合でなければ必ず，高々 n 個の点からなる台を持つ測度を含む．

この半無限計画にとって重要な性質を導くためには，Carathéodory の定理あるいはその系が必要であるが，これは次のように述べられる（Mangasarian (1969), Rockafellar (1970)）．

補助定理 8（Carathéodory）． Xを R^n の部分集合とする．

$$x\in \operatorname{cone} X\left(\triangleq\bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda \operatorname{co} X=\bigcup_{\lambda\geq 0}\operatorname{co} \lambda X\right)$$

すなわち x がXの点の非負線形結合であるとき，x はXの高々 n 個の点の非負線形結合として

$$x=\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i,\qquad x^i\in X,\qquad \lambda_i\geq 0,\qquad i=1,2,\ldots,n$$

と書ける．

定理 7 の証明． KKT 条件（4.4）すなわち（4.5）を満たす $\Lambda^*\in M(\Omega)$ が存在するとする．g の ω に関する連続性により，

$$(4.6)\qquad \bar{\Omega}(x^*)\triangleq\{\,\omega\in\Omega \mid g(x^*,\omega)=0\,\}$$

で定義される活性な点の集合は Ω において閉したがってコンパクトであり，その補集合

$$\Omega\backslash\bar{\Omega}(x^*)=\{\,\omega\in\Omega \mid g(x^*,\omega)<0\,\}$$

は開集合である．(4.5) の相補条件は，Λ^* の非負条件とともに，$\Omega\backslash\bar{\Omega}(x^*)$ 上で $\Lambda^*=0$ であることを意味する．このとき（4.5）の停留条件は

$$(4.7)\qquad \nabla f(x^*)+\int_{\bar{\Omega}(x^*)}\nabla_x g(x^*,\omega)d\Lambda^*=0$$

となるが，これは

$$\text{(4.8)} \qquad -\nabla f(x^*) \in \mathrm{cone}\{\nabla_x g(x^*, \omega) \mid \omega \in \bar{\Omega}(x^*)\}$$

と等価である．これらが等価であることは積分論からすれば自明のことであるが，ここでは簡単に（ただし数理計画法的に）証明しておく．

R^n の部分集合 S と X を以下のように定義する．

$$S = \left\{ \int_{\bar{\Omega}(x^*)} \nabla_x g(x^*, \omega) d\Lambda \,\middle|\, \Lambda \geq 0,\, \Lambda \in M(\Omega) \right\}$$
$$X = \{\nabla_x g(x^*, \omega) \mid \omega \in \bar{\Omega}(x^*)\}$$

明らかに S は凸錐で $S \supset X$，故に $S \supset \mathrm{cone}\, X$ である．$S \subset \mathrm{cone}\, X$ であることを示そう．$0 \neq s \in S$ とすると，$\int_{\bar{\Omega}(x^*)} d\Lambda \neq 0$ なるある $\Lambda \geq 0$ に対して

$$s = \int_{\bar{\Omega}(x^*)} \nabla_x g(x^*, \omega) d\Lambda$$

となる．いま

$$s_0 \triangleq s \Big/ \int_{\bar{\Omega}(x^*)} d\Lambda \notin \mathrm{co}\, X$$

であると仮定する．$\nabla_x g$ の連続性と $\bar{\Omega}(x^*)$ のコンパクト性より X は R^n におけるコンパクト集合であるから，$\mathrm{co}\, X$ もまたコンパクトしたがって閉集合である．このとき，凸集合の強意の分離定理より

$$\text{(4.9)} \qquad a^T s_0 > \alpha$$
$$a^T x \leq \alpha \qquad \text{for all } x \in \mathrm{co}\, X$$

を満たす $a \in R^n$ および $\alpha \in R$ が存在する．故に

$$a^T \nabla_x g(x^*, \omega) \leq \alpha \qquad \text{for all } \omega \in \bar{\Omega}(x^*),$$

したがって

$$a^T s_0 = \int_{\bar{\Omega}(x^*)} a^T \nabla_x g(x^*, \omega) d\Lambda \Big/ \int_{\bar{\Omega}(x^*)} d\Lambda \leq \alpha$$

を得るが，これは (4.9) に矛盾する．よって $s_0 \in \mathrm{co}\, X$，したがって $s \in \mathrm{cone}\, X$ を得る．以上により，$S = \mathrm{cone}\, X$，またその結果として（4.7）と（4.8）の等価性が示された．

ここで補助定理 8 により，ある $\omega^i \in \bar{\Omega}(x^*), i = 1, 2, \ldots, k$（ただし $k \leq n$）に対して

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla_x g(x^*, \omega^i)$$

となる $\lambda^* \in R^n$ の存在が保証される．これに対応する測度 Λ^* は明らかに（4.5）を満たし，したがって題意の離散測度である．□

定理 6 および 7 より次の系が直ちに得られる．

系 9. 仮定 1-3 が成り立つとし，問題 (2.1) は $x^* \in R^n$ において最小値をとるとする．このとき KKT 条件 (4.4) を満たす乗数の集合は常に高々 n 個の点からなる台を持つ測度を含む．

また同時に，John (1948) によって与えられた次の古典的な結果を正当化する．

系 10 (KKT 条件). 仮定 1-3 が成り立つとする．問題（2.1）が $x^* \in R^n$ において最小値をとるための必要十分条件は，x^* が許容解で

$$\nabla f(x^*)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^*\nabla_x g(x^*, \omega^i)=0 \tag{4.10}$$
$$\lambda_i^* g(x^*, \omega^i)=0, \quad \lambda_i^*\geq 0, \quad i=1,2,\ldots,k, \quad k\leq n$$

を満たす $\lambda_i^*\in R$ および $\omega^i\in\Omega, i=1,2,\ldots,k$ が存在することである．

ところで半無限計画の局所的性質と大域的性質は次の命題により自然に結びつく．

補助定理 11. 仮定 1-3 が成り立ち，問題(2.1)は $x^*\in R^n$ で最小値をとるものとする．このとき KKT 条件（4.4）を満たす乗数の集合は双対問題（3.2）の解集合に一致する．

証明. Λ^* が KKT 条件 (4.4) を満たすとする．仮定 1 および 2 により，任意の $x\in R^n$ に対して

$$f(x)\geq f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)$$
$$G(x)\geq G(x^*)+G'(x^*)(x-x^*)$$

が成り立つ．このとき，$\Lambda^*\geq 0$ と $\nabla f(x^*)+\nabla G(x^*)\Lambda^*=0$ より，任意の $x\in R^n$ に対して

$$\begin{aligned}L(x, \Lambda^*)&=f(x)+\langle\Lambda^*, G(x)\rangle\\&\geq f(x^*)+\langle\Lambda^*, G(x^*)\rangle+(\nabla f(x^*)+\nabla G(x^*)\Lambda^*)^T(x-x^*)\\&=L(x^*, \Lambda^*)\end{aligned}$$

を得る．一方，$G(x^*)\leq 0$ と $\langle\Lambda^*, G(x^*)\rangle=0$ より，任意の $\Lambda\geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}L(x^*, \Lambda)&=f(x^*)+\langle\Lambda, G(x^*)\rangle\\&\leq f(x^*)\\&=f(x^*)+\langle\Lambda^*, G(x^*)\rangle=L(x^*, \Lambda^*)\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって (x^*, Λ^*) は鞍点条件

$$L(x, \Lambda^*)\geq L(x^*, \Lambda^*)\geq L(x^*, \Lambda) \qquad \text{for all } x\in R^n \text{ and } \Lambda\geq 0$$

を満たし，これより

$$\min_x L(x, \Lambda^*)=L(x^*, \Lambda^*)\geq L(x^*, \Lambda)\geq\min_x L(x, \Lambda) \qquad \text{for all } \Lambda\geq 0$$

を得る．故に Λ^* は双対問題（3.2）の解である．

逆は，仮定 1-3 のもとで，(3.3)の最後の式が停留条件 $\nabla_x L(x^*, \Lambda^*)=0$ と等価であることから，定理 4 より明らか．□

系 9 と補助定理 11 より直ちに次の命題が得られる．

定理 12. 仮定 1-3 が成り立ち，問題(2.1)は $x^*\in R^n$ で最小値をとるものとする．このとき双対問題（3.2）の解集合は常に高々 n 個の点からなる台を持つ測度を含む．

5. 逆双対性

双対問題を解いてその解 Λ^* が得られたとする．このとき，主問題の任意の解が Lagrange 関

数 $L(x, \Lambda^*)$ を最小にすることは定理4によって保証されている．しかし逆は成り立たない．すなわち，Lagrange 問題 $\min_x L(x, \Lambda^*)$ の解は必ずしも主問題の解であるとは限らない．

定理 13. 仮定1および2が成り立つとする．また Λ^* を双対問題 (3.2) の解とし，x^* を対応する Lagrange 問題の解とする（すなわち (x^*, Λ^*) を Wolfe の双対問題 (3.4) の解とする)．このとき x^* が $G(x^*) \leq 0$ と $\langle \Lambda^*, G(x^*) \rangle = 0$ をともに満たせば，x^* は主問題(2.1)の解である．

証明. 定理6より明らか．いまの場合仮定3は不要であることに注意．□

以下の逆双対定理は定理13の仮定に対する十分条件を与える．

定理 14. 仮定1および2が成り立つとする．また Λ^* を双対問題 (3.2) の解とし，x^* を対応する Lagrange 問題の解とする（すなわち (x^*, Λ^*) を Wolfe の双対問題 (3.4) の解とする)．このとき $L(\cdot, \Lambda^*)$ が x^* の近傍で強凸ならば，x^* は $G(x^*) \leq 0$ および $\langle \Lambda^*, G(x^*) \rangle = 0$ を満たし，したがって x^* は主問題 (2.1) の解である．

証明. $L(\cdot, \Lambda^*)$ の x^* の近傍における強凸性により，Lagrange 問題 $\min_x L(x, \Lambda^*)$ の解は x^* に一意に定まる．このとき $M(\Omega)$ 上で

$$v(\Lambda) \triangleq \min_x L(x, \Lambda)$$

と定義される双対汎関数 v が Λ^* において Fréchet 微分可能であることを示す．

最適解写像 $X : M(\Omega) \to 2^{R^n}$ を

$$X(\Lambda) \triangleq \arg\min_x L(x, \Lambda) = \{ x \in R^n \mid v(\Lambda) = L(x, \Lambda) \}$$

と定義する．このとき $X(\Lambda^*) = \{x^*\}$ である．まず X が点対集合写像として Λ^* において開写像（下半連続）であることを示す．仮定1により，Lagrange 関数 L は任意に固定された Λ に対して x に関して凸である．また，仮定2により L は連続である．Lagrange 問題は有限次元空間における無制約問題であるから，Hogan (1973) の Corollary 9.1 により，X が Λ^* の近傍で非空かつ一様コンパクトであるための必要十分条件は $X(\Lambda^*)$ が非空かつコンパクトであることであるが，$X(\Lambda^*) = \{x^*\}$ であるからこれはもちろん成立する．Λ^* の近傍における X の一様コンパクト性，Lagrange 問題が無制約であること，また L の連続性により，解写像 X は Λ^* において閉写像かつ開写像（すなわち連続）となる（Hogan (1973) の Corollary 8.1 を参照)．

さて，任意の $\Lambda \in M(\Omega)$ に対して

$$v(\Lambda) \leq L(x^*, \Lambda) = f(x^*) + \langle \Lambda, G(x^*) \rangle$$

となるが，

$$v(\Lambda^*) = L(x^*, \Lambda^*) = f(x^*) + \langle \Lambda^*, G(x^*) \rangle$$

であるから，

$$v(\Lambda) - v(\Lambda^*) \leq \langle \Lambda - \Lambda^*, G(x^*) \rangle \tag{5.1}$$

を得る．他方，任意の $\Lambda \in M(\Omega)$ と $x \in X(\Lambda)$ に対して，

$$v(\Lambda^*) \leq L(x, \Lambda^*) = f(x) + \langle \Lambda^*, G(x) \rangle$$

および

$$v(\Lambda)=L(x,\Lambda)=f(x)+\langle\Lambda, G(x)\rangle$$

となるが，これより

$$(5.2)\qquad v(\Lambda)-v(\Lambda^*)-\langle\Lambda-\Lambda^*, G(x^*)\rangle \geq \langle\Lambda-\Lambda^*, G(x)-G(x^*)\rangle \geq -\|\Lambda-\Lambda^*\|\|G(x)-G(x^*)\|$$

を得る．不等式 (5.1) および (5.2) より，任意の $\Lambda\neq\Lambda^*$ と $x\in X(\Lambda)$ に対して

$$0\geq\frac{v(\Lambda)-v(\Lambda^*)-\langle\Lambda-\Lambda^*, G(x^*)\rangle}{\|\Lambda-\Lambda^*\|}\geq-\|G(x)-G(x^*)\|$$

が成立する．X は Λ^* において開写像であるから，$\Lambda^k\to\Lambda^*$ なる点列 $\{\Lambda^k\}\subset M(\Omega)$ をとったとき，十分大きな k に対して $x^k\in X(\Lambda^k)$ かつ $x^k\to x^*$ となる点列 $\{x^k\}\subset R^n$ が存在する．したがって，G の連続性により

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|v(\Lambda^k)-v(\Lambda^*)-\langle\Lambda^k-\Lambda^*, G(x^*)\rangle|}{\|\Lambda^k-\Lambda^*\|}=0$$

が成り立ち，これより v が Λ^* において Fréchet 微分可能であり，その導値が

$$(5.3)\qquad v'(\Lambda^*)S=\langle S, G(x^*)\rangle=\int_\Omega g(x^*,\omega)dS\qquad(\forall S\in M(\Omega))$$

で与えられることがわかる．

Λ^* は問題 (3.2) の最適解であるから，KKT 定理 (例えば Luenberger (1969) の Section 9.4, Theorem 1 を参照) により

$$v'(\Lambda^*)-M=0,\qquad M(\Lambda^*)=0,\qquad M\leq 0$$

を満たす乗数 $M\in M(\Omega)^*$ が存在する ($M(\Omega)^*$ は $M(\Omega)$ の双対空間を意味するものとする)．すなわち

$$v'(\Lambda^*)\Lambda^*=0,\qquad v'(\Lambda^*)\leq 0$$

が成り立つ．(5.3) 式を考慮すると，

$$\int_\Omega g(x^*,\omega)d\Lambda^*=0,\qquad g(x^*,\omega)\leq 0\quad \text{for all } \omega\in\Omega$$

あるいは等価に

$$\langle\Lambda^*, G(x^*)\rangle=0,\qquad G(x^*)\leq 0$$

を得る．□

f が強凸，あるいは測度 Λ^* の有限の台のうちいずれかの ω^i に対して $g(\cdot,\omega^i)$ が強凸ならば，$L(\cdot,\Lambda^*)$ は強凸である．また x^* の近傍で $L(\cdot,\Lambda^*)$ が強凸になるための別の十分条件として，$L(\cdot,\Lambda^*)$ が x^* で 2 回連続微分可能でヘッセ行列 $\nabla^2_{xx}L(x^*,\Lambda^*)$ が正則（したがって正定）であることが挙げられるが，これは f および Λ^* のすべての台 ω^i に対して $g(\cdot,\omega^i)$ が x^* において 2 回連続微分可能で，さらに $\nabla^2 f(x^*)$ かいずれかの $\nabla^2_{xx}g(x^*,\omega^i)$ が正則であるときに成り立つ．

主問題に対して許容でないかあるいは相補条件を満たさない双対ペアから主問題の解を復元することは一般にはできないが，好運なことに凸 2 次計画（強凸でなくてよい．よって線形計画をも含む）については次の性質が成立する．

定理 15. $0 \leq Q \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$, $A \in B(R^n, C(\Omega))$ および $c \in C(\Omega)$ とする．また (x^*, Λ^*) を Dorn の双対問題(3.6)の解とし，ξ^* をその等式制約に対応した乗数とする．このとき ξ^* は主問題（3.5）の解を与える．

証明. 問題（3.6）に対する Lagrange 関数 $\mathcal{L}: R^n \times M(\Omega) \times R^n \times M(\Omega)^* \to R$ を

$$\mathcal{L}(x, \Lambda, \xi, M) \triangleq \frac{1}{2} x^T Q x + \langle \Lambda, c \rangle - \xi^T (Qx + b + A^* \Lambda) + \langle M, \Lambda \rangle$$

と定義する．ただし $\langle M, \Lambda \rangle$ は $M(\Omega)^*$ と $M(\Omega)$ の間の双対ペアを表わすものとする．このとき，KKT 定理（Luenberger (1969) の Section 9.4, Theorem 1）により

$$\begin{aligned} & \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \Lambda^*, \xi^*, M^*) = Qx^* - Q\xi^* = 0 \\ & \mathcal{L}_\Lambda(x^*, \Lambda^*, \xi^*, M^*) = c^* - (A\xi^*)^* + M^* = 0 \\ & \langle M^*, \Lambda^* \rangle = 0, \quad M^* \leq 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

を満たす乗数 ξ^* および M^* が存在する．ここで c^* と $(A\xi^*)^*$ はそれぞれ自然な写像によって $M(\Omega)^* = C(\Omega)^{**}$ に埋め込まれた c と $A\xi^*$ を意味するものとする．（5.4）の第2式は乗数 M^* が

$$\langle M^*, \Lambda \rangle = \langle \Lambda, A\xi^* - c \rangle \qquad (\forall \Lambda \in M(\Omega))$$

によって $A\xi^* - c$ と同一視できることを示している．このとき（5.4）の最後の2式はそれぞれ $\langle \Lambda^*, A\xi^* - c \rangle = 0$ および $A\xi^* \leq c$ と表わせる（$C(\Omega)$ の順序錐は一様ノルムのもとでは閉集合であることに注意されたい）．(x^*, Λ^*) の双対問題に対する許容性と（5.4）の第1式より $Q\xi^* + b + A^*\Lambda^* = 0$ と $\Lambda^* \geq 0$ が得られる．以上のように Λ^* は ξ^* において主問題（3.5）に対する KKT 条件を満たす．主問題の凸性より，ξ^* の最適性が証明された．□

注意. Dorn の双対問題の代わりに Wolfe の双対問題を解いた場合，定理の結果は少々異なったものとなる："(x^*, Λ^*) を Wolfe の双対問題の解とし，ξ^* をその等式制約に対応した乗数とする．このとき $x^* + \xi^*$ が主問題の解を与える"．

6. おわりに

本稿では，制約関数 g のインデックスパラメータ ω に関する連続性を仮定して，半無限計画問題を $X = R^n$, $Y = C(\Omega)$ で定式化した上で，その最適性条件および双対性に関する性質を導出した．g が有限次元ベクトル値関数の場合あるいは g が ω に関して区分的に連続な場合への拡張は容易である．離散測度を用いた KKT 条件は既に John (1948) により本質的に得られているが，本稿では関数解析的手法を用いて定理6を経由することにより誘導した．これにより，定理7にあるように KKT 条件を満たす離散測度の存在が特定の制約想定に依存しないということが示された．関数空間 Y およびその位相の選び方は，この他にもいろいろ考えられる．伊藤・志水（1991）では $Y = L_2(\Omega)$ の場合について考察し，準ニュートン法による近似解法を提案している．また，Ito (1996) では特に半無限線形計画問題を $Y = L_\infty(\Omega)$ として定式化し，主双対内点法による数値解法について考察している．なお，本稿は Liu et al. (1998) および Ito et al. (1998) において半無限凸計画問題の数値解法を開発する際に必要になった性質をまとめたものである．これらの解法はいずれも基本的に定理6の条件（4.5）を数値的に解くアルゴリズムになっており，その際収束性を保証するのに定理7の性質が用いられる．

本研究の一部は，文部省科学研究費補助金奨励研究（A）（課題番号：08740166，09740166）および統計数理研究所共同研究（課題番号：9-共研 B-3）の援助を受けて行なわれた．

参 考 文 献

Anderson, E. J. and Nash, P. (1987). *Linear Programming in Infinite-dimensional Spaces: Theory and Applications*, Wiley-Interscience, Chichester.

Anderson, E. J. and Philpott, A. B. (eds.) (1985). *Infinite Programming*, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Vol. 259, Springer, Berlin.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. and Shetty, C. M. (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 2nd ed., Wiley, New York.

Dorn, W. S. (1960a). Duality in quadratic programming, *Quart. Appl. Math.*, **18**, 155-162.

Dorn, W. S. (1960b). A duality theorem for convex programs, *IBM Journal of Research and Development*, **4**, 407-413.

Fiacco, A. V. and Kortanek, K. O. (eds.) (1983). *Semi-infinite Programming and Applications*, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Vol. 215, Springer, Berlin.

Glashoff, K. and Gustafson, S.-A. (1983). *Linear Optimization and Approximation*, Springer, New York.

Goberna, M. A. and Lõpez, M. A. (1998). *Linear Semi-infinite Optimization*, Wiley, Chichester.

Hettich, R. (ed.) (1979). *Semi-infinite Programming*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Vol. 15, Springer, Berlin.

Hettich, R. and Kortanek, K. O. (1993). Semi-infinite programming: theory, methods, and applications, *SIAM Rev.*, **35**, 380-429.

Hettich, R. and Zencke, P. (1982). *Numerische Methoden der Approximation und Semi-infiniten Optimierung*, B. G. Teubner, Stuttgart.

Hiriart-Urruty, J.-B. and Lemaréchal, C. (1993). *Convex Analysis and Minimization Algorithms I: Fundamentals*, Springer, Berlin.

Hogan, W. W. (1973). Point-to-set maps in mathematical programming, *SIAM Rev.*, **15**, 591-603.

Ito, S. (1996). An interior point approach to semi-infinite linear programming (distributed at the International Symposium on Optimization and Computation, Hayama, Japan).

伊藤 聡，志水清孝 (1991)．無限制約最適化問題に対する双対準 Newton アルゴリズム，計測自動制御学会論文集，**27**, 452-457.

Ito, S., Liu, Y. and Teo, K. L. (1998). A dual parametrization method for convex semi-infinite programming, *Optimization: Techniques and Applications*, Volume 1 (eds. K. L. Teo, P. F. Siew, Y. H. Leung, L. S. Jennings and V. Rehbock), 550-557, Curtin University of Technology, Perth.

John, F. (1948). Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, *Studies and Essays, Courant Anniversary Volume* (eds. K. O. Friedrichs, O. E. Neugebauer and J. J. Stoker), 187-204, Wiley, New York.

Krabs, W. (1979). *Optimization and Approximation*, Wiley, Chichester.

Liu, Y., Teo, K. L. and Ito, S. (1998). A dual parametrization approach to linear-quadratic semi-infinite programming problems, *Optimization Methods and Software* (to appear).

Luenberger, D. G. (1969). *Optimization by Vector Space Method*, Wiley, New York.

Mangasarian, O. L. (1969). *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York.

Mangasarian, O. L. and Ponstein, J. (1965). Minmax and duality in nonlinear programming, *J. Math. Anal. Appl.*, **11**, 504-518.

Polak, E. (1987). On the mathematical foundations of nondifferentiable optimization in engineering design, *SIAM Rev.*, **29**, 21-89.

Polak, E. (1997). *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*, Springer, New York.

Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey.

Shimizu, K., Ishizuka, Y. and Bard, J. F. (1997). *Nondifferentiable and Two-Level Mathematical Programming*, Kluwer, Boston.

Wolfe, P. (1961). A duality theorem for non-linear programming, *Quart. Appl. Math.*, **19**, 239-244.

Yosida, K. (1980). *Functional Analysis*, 6th ed., Springer, Berlin.

Optimality and Duality of Semi-infinite Programming

Satoshi Ito

(The Institute of Statistical Mathematics)

Semi-infinite programming——optimization in finite-dimensional spaces with infinitely many constraints——arises in various fields of engineering such as general approximation, resource allocation in decentralized systems, decision making under competition, multi-objective optimization, and filter design in signal processing. Since an infinite-dimensional constraint can be transformed into a single constraint with an optimal-value function under some conditions, semi-infinite programming can be regarded as a simple case of hierarchical optimization. In this sense, the theory of semi-infinite programming gives a fundamental background of general hierarchical mathematical programming.

In this paper, we formulate convex semi-infinite programming problems in a functional analytic setting and explore the primal-dual structure underlying these problems by investigating their global duality and local differential properties. With assumptions that the constraint function is continuous with respect to its index parameter and that the index set is compact Hausdorff, we redefine the constraint function as an operator whose range is the Banach space consisting of continuous functions defined on the index set and equipped with the uniform norm. The order in the range space is given by a cone consisting of all nonnegative functions on the index set. A Karush-Kuhn-Tucker (KKT) type condition is given as an optimality condition for such a cone-constrained nonlinear programming problem, where the Lagrange multiplier is defined as a regular Borel measure on the index set. It is then shown that the set of multipliers satisfying the KKT type condition necessarily includes a measure with finite support unless it is empty. Hence any constraint qualification ensures the existence of such a discrete measure usually called the Haar measure. This observation justifies a classical result that can be traced back to Fritz John's 1948 paper.

On the other hand, it is well known that strong duality holds for convex programming under Slater's constraint qualification. The corresponding dual problem for semi-infinite programming is then formulated in the space of finite signed regular Borel measures on the index set. The local KKT theory and the global duality theory are naturally related through the fact that the set of multipliers satisfying the KKT condition coincides with the set of solutions to the dual problem, which leads to an immediate consequence that the set of dual solutions always includes a measure with finite support under the Slater condition. Emphasis is also given to converse duality, i.e., how to retrieve primal information from dual information, especially for semi-infinite (not necessarily strictly) convex quadratic programming (hence including linear programming).

This paper is a compilation of basic mathematical properties of semi-infinite programming prepared for development of several numerical algorithms in joint works with Professor K. L. Teo and Dr. Y. Liu of Curtin University of Technology, Perth, Western Australia.
The work of the author was partially supported by the Ministry of Education, Science, Sports and Culture under Grant-in-Aid #08740166 and #09740166 for Encouragement of Young Scientists and by the Institute of Statistical Mathematics under its cooperative research program 97-ISM・CRP-B3.

Key words: Semi-infinite programming, convex programming, optimality condition, Karush-Kuhn-Tucker condition, Lagrange multiplier, duality, converse duality, semi-infinite quadratic programming, semi-infinite linear programming.