統計数理 (1999)
第 47 巻 第 1 号 249-255

公開講演会要旨

カオス・複雑系を解く非線形解析の基礎概念と普遍法則

── 確率安定性，相乗性結合，確率共鳴，非定常性，位相乱流 ──

筑波大学* 金 野 秀 敏

(1998 年 11 月 4 日，統計数理研究所 講堂)

1. はじめに

複雑系のダイナミクスを解析しその非線形数理構造を明らかにすることは容易なことではない．この理由は複雑な系になるほど系の持つエントロピーが低下し出し，系がより簡単にみえることに気が付けば理解できる．計算機が発達してきたので複雑系の実体モデルを用いて数値計算すればよいと思われるかもしれない．しかし，たとえある複雑系の数値計算が可能であったとしても，モデルの複雑さ故に結果の現れる物理的理由を理解・説明することが難しい状況に数多く出会う．

本報では複雑なダイナミカルシステムを大局的に理解するための非線形解析の諸概念，相乗性結合，確率安定性，確率共鳴，非定常性や位相乱流などの諸概念を観測されている多くの統計量の性質を演繹できる非線形構造を導入可能な現象論的確率モデルとの関連で説明し，付随した統計科学と普遍法則発見の重要性を述べる．まず，確率微分方程式を採用する理由は(i)多体問題を記述する知恵であり，(ii)直接数値計算が可能な場合でも平均場の直接計算であることが多く揺らぎの特性まで再現できるか疑問であること，(iii)モンテカルロ法での粒子の実体の物理的解釈は時として難しい場合があることを指摘しておく．科学の道具としての確率非線形モデルの持つべき性質は(a)予測でき，(b)システム同定でき，(c)現象発現の機構を説明できることであろう．

2. 相乗結合

ランダムな周波数変調を受けている調和振動子を考えよう (Kubo (1963))：

$$\ddot{X} + \Omega^2(t)\,X = 0, \tag{2.1}$$

ここで，$\Omega(t) = \omega_0 + \omega_1(t)$．ランダム成分 $\omega_1(t)$ の統計的性質は平均零の正規分布で相関関数が時間差のみの関数 (弱定常) であることを要請するが白色性は要請しない：$\langle\omega_1(t)\rangle = 0$，$\langle\omega_1(t)\,\omega_1(t')\rangle = \langle\omega_1^2\rangle\,\psi(t-t')$．この久保振動子 (2.1) は確率変数 $\omega_1(t)$ の影響が掛け算 (相乗結合) の形で変数Xに影響を及ぼしており最も簡単な非線形モデルであることに注意する．(2.1) の複素変数版は $\dot{A} = i\Omega(t)\,A$ であり，雑音源の相関が指数関数 $\psi(\tau) = \exp(-\gamma\tau)$ とす

* 機能工学系：〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1.

ると規格化された相関関数は次のような 2 重指数関数となる：

$$(2.2)\qquad \mathcal{G}(t)=\frac{\langle A(t)\,A^*(0)\rangle}{\langle|A|^2\rangle}=\exp\left\{i\omega_0 t-\mathcal{D}_\infty\frac{\exp(-\gamma t)+\gamma t-1}{\gamma}\right\},$$

ここで，$\mathcal{D}_\infty=\langle\omega_1^2\rangle/\gamma$ である．周波数変調が速いとき $\mathcal{G}(t)\to\exp\{i\omega_0 t-\mathcal{D}_\infty t\}$ となり，ローレンツ型のスペクトルを与える．一方，周波数変調が遅いとき $\mathcal{G}(t)\to\exp\{i\omega_0 t-(\langle\omega_1^2\rangle/2)\,t^2\}$ となりガウス型スペクトルを与える．この運動による先鋭化は多くの実験で確認されている．

次に，カオス振動子が別のカオス振動子によって相乗的な変調を受けている場合の影響をみるため相乗結合ロジステイックモデル (Tomita (1984)) をとりあげる：

$$(2.3)\qquad X_{n+1}=AX_nY_n(1-X_n);\qquad Y_{n+1}=BY_n(1-Y_n)$$

ここで，A,B はともに 4 をとる．X は Y によって変調を受けているが，Y による変調のない場合には厳密解 ($X_n=\sin^2(2^n\sin^{-1}\sqrt{X_0})$) があり，周波数スペクトルは白色スペクトルを与えることが証明できる (Ott (1993))．変調がある場合間欠的な時系列が生成され周波数スペクトルは $1/f$ 型となり，変調は長時間相関の創出とスペクトルの先鋭化に効く．

3. 確率安定性

定数係数の線形あるいは非線形確率微分方程式で外部雑音が相加性白色雑音のみの場合雑音の印加によって特性方程式の固有値は影響を受けない．しかし，相乗性雑音が印加されているときには特性方程式の固有値が雑音の種類や強度によって影響を受ける．相乗性雑音の印加に伴うシステムの安定性に拘わる諸問題は“確率安定性 (Stochastic Stability)”と呼ばれており，安定性の定義，基準，安定条件など数学的にも難しい未解決の問題がたくさんある．ここではまず最も基礎的な安定性基準を採用し，相乗性雑音が平均値の方程式の特性方程式の固有値に与える影響を周波数変調久保振動子 (2.1)

$$(3.1)\qquad \ddot{x}+\omega_0^2(1+\xi(t))\,x=0,$$

で述べよう．平均値の従う方程式は $\langle\ddot{x}\rangle+(1/2)\,\omega_0^2\mathcal{D}_1\langle\dot{x}\rangle+\omega_0^2(1-(1/2)\,\omega_0\mathcal{D}_2)\langle x\rangle=0$，ここに，$\mathcal{D}_1\equiv\int_0^\infty\langle\xi(t)\,\xi(t+\tau)\rangle[1-\cos(2\omega_0\tau)]\,d\tau$，$\mathcal{D}_2\equiv\int_0^\infty\langle\xi(t)\,\xi(t+\tau)\rangle\sin(2\omega_0\tau)\,d\tau$ 及び $\langle\xi(t)\,\xi(t+\tau)\rangle=\langle\xi^2\rangle\,\psi(\tau)$ となり，$\xi(t)$ が非白色雑音の場合には減衰項を与え (固有値の実部に負の寄与をする；システムがより安定になる)，また，周波数の下方シフトに寄与する．一方，散逸変調のみがある ($K(t)=k_0+k_1(t)$) とき

$$(3.2)\qquad \ddot{x}+K(t)\,\dot{x}+\omega_0^2x=0.$$

平均値の従う方程式は $\langle\ddot{x}\rangle+(k_0-(1/2)\,\mathcal{D}_3)\langle\dot{x}\rangle+\omega_0^2(1-(1/2\omega_0)\,\mathcal{D}_4)\langle x\rangle=0$，ここで，$\mathcal{D}_3\approx\int_0^\infty\langle k_1(t)\,k_1(t+\tau)\rangle[1+\cos(2\omega_0\tau)]\,d\tau$，$\mathcal{D}_4\approx\int_0^\infty\langle k_1(t)\,k_1(t+\tau)\rangle\sin(2\omega_0\tau)\,d\tau$ 及び $\langle k_1(t)\cdot k_1(t+\tau)\rangle=\langle k_1^2\rangle\,\phi(\tau)$ となり非白色雑音 $k_1(t)$ は負の散逸 (固有値の実部に正の寄与をする；システムがより不安定になる) と周波数の下方シフトに寄与する．現実のシステムの場合実数変数の一般化された 2 次系久保モデル $\ddot{x}+(k_0+k_1(t))\,\dot{x}+\omega_0^2(1+\xi(t))\,x=F(t)$, ($k_1(t)$, $\xi(t)$, $F(t)$ はすべて正規過程に従う有色雑音源) に対応する状況は数多く現れるが雑音源の独立性は成立しないことが多く，また非線形の長時間相関を有する運動が埋め込まれておりこれによる確率安定性への影響の問題が生ずる (Konno and Kanemoto (1998, 1999))．この事情を簡単なカオス力学系，レスラーおよびローレンツモデルでみてゆこう．

レスラーモデル

$$\dot{x} = -y - z; \quad \dot{y} = x + ay; \quad \dot{z} = bx + xz - cz, \tag{3.3}$$

で第1式を微分して y を消去すると不安定線形振動子と緩和機構の組 $\ddot{x} - a\dot{x} + x = az - \dot{z}$; $\dot{z} = bx + xz - cz$ に書け振動状態のスイッチング機構の存在，y に関する標準形 $\dddot{y} + (c - a\dot{y} + ay)\ddot{y} + (1 + b - ac + a\dot{y} - (1 + a^2)y)\dot{y} + (c - ab)y + ay^2 = 0$ から自己変調によりシステムの"局所安定性"の時間変動ならびに交替がおこることが理解できる (Konno and Ohtomo (1998))．カオス領域ではこの変動が大きくなり"局所リアプノフ指数"も大きく揺らぐ．

ローレンツモデル

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y; \quad \dot{y} = (r - z)x - y; \quad \dot{z} = xy - bz, \tag{3.4}$$

では相乗性結合が2個存在し (3.3) に比べて複雑になるが，書き直すと $\ddot{x} + \beta\dot{x} + (\partial V(x, \eta)/\partial x) = 0$; $\dot{\eta} = f(\eta, x)$．ここで，$V(x, \eta) = ax^4 + b(\eta)x^2, \beta, a, b(\eta)$ 及び $f(\eta, x)$ はローレンツモデルのパラメータ σ，b，r の関数である．これからカオス挙動は η の変化が2重井戸型ポテンシャルの障壁を変動させることにより発生することがわかる．また，η の運動により x の運動がパラメータ励振・周波数変調を受けているとみると長時間相関の出現，"局所非定常性"の存在が理解できる．

ここで，このような純粋力学系のカオスの特性を捉えるのに確率過程や統計的方法が有効であることを述べておくことは教育的である：Aizawa (1982) はローレンツモデルを $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ の場合に数値計算を行い，1次元運動 $x(t)$ から大局的な性質を引き出した．運動は力学部分 $O(t)$ (spirally rotating motion) と確率部分 $P(t)$ (flip-flop jump) の2つに分離できる：$x(t) = O(t) + P(t)$．$P(t)$ がどのような確率過程に従うか調べたところ，再帰時間の分布と観測時間 T での jump の数の分布はそれぞれ指数分布，ポアソン分布でよく近似できることが確認された．$P(t)$ はマルコフ過程の中の最も簡単な生成 (非定常) 過程であるポアソン過程で記述出来た．$O(t)$ が力学と見なせるかどうかを確認する為に上のモデル (3.4) に少し近似を入れると，縮約方程式は $\ddot{x} + \{(1 + \sigma) - (2/b^2)(\sigma - (b/2))x^2\}\dot{x} - \sigma(r - 1)x + (\sigma/b)x^3 = 0$ となるから，これに初期値を与えて確かめれば良い．実際，この解は楕円関数で表現できる．また，森・蔵本 (1994) は"局所安定性"の時間変動に伴う"局所リアプノフ指数"のゆらぎの確率分布関数に統計解析を"一般化されたフラクタル解析法"をまじえて実行し異なるカオスアトラクタ間の状態変化を一般化された相転移の枠組みで理解することを精力的に実行している．

4. 非定常性

前節で非線形システムの安定性が時間的に変動交替する"局所非定常性"の問題が発生することを述べたが，通常，確率過程の (弱) "定常性"の定義は「相関関数 $C(t, t') \equiv \langle x(t)x(t')\rangle$ (ここで $\langle\cdots\rangle$ はアンサンブル平均を意味する) が時間差 $\tau = t - t'$ のみで表現できる」ことである．カオス力学系などのように長時間の持続振動が存在するとき相関関数が時間差のみの関数では表現できないことを示すことはやさしい．任意の波形 $x(t)$ は一般にフーリエ級数 $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$ で表現できるので，相関関数 $\langle x(t)x(t')\rangle$ には $\cos(\omega_n t + \phi_n)\cos(\omega_m t' + \phi_m)$ などの積が現れる．積を和になおす公式により2つの余弦関数の周波数が同じとき $\cos(\omega_n t + \phi_n)\cos(\omega_n t' + \phi_n) = (1/2)[\cos\{\omega_n(t + t') + 2\phi_n\} + \cos\omega_n(t - t')]$，それらの周波数がほんの少し異なるとき $\cos(\omega_n t + \phi_n)\cos[(\omega_n + \Delta\omega_n)t' + \phi_n + \Delta\phi_n] = (1/2)[\cos\{\omega_n(t + t') + \Delta\omega_n t' + 2\phi_n + \Delta\phi_n\} + \cos\{\omega_n(t - t') - \Delta\omega_n t' - \Delta\phi_n\}]$ となる．いまある特定の周波数

が卓越している持続振動が内在している(すなわち，a_nが他のa_m $(m \neq n)$よりもかなり大きい)状況を考える(実際，レスラーモデル(3.3)などでも軌道全体のつくる曲面がメビウスの帯を構成する周期Tの運動が卓越したカオスの存在は確認されている)と上式の右辺第一項目のような$(t+t')$を含む項などがいずれも無視できず，少なくとも有限長データを用いて計算した持続振動の相関関数に関する限り，“定常性”は厳密な意味では成立しないことが理解できる．周波数変調により周波数がほんの少し異なる周波数成分が現れ，それらの係数$\{a_n\}$の大きさが拮抗すると$x(t)$にも，また，相関関数にもビート波形が現れやすくなることも理解できよう．

有限長の非線形時系カオス列データ解析を実行するとき，上述の意味で“非定常性”を認識した解析を“時間領域”で実行する必要がある．「長時間記録の時系列データを用いて相関関数やパワースペクトルを推定すれば普遍的な関数推定になり好ましい」とはいえない．確かに平均化(粗視化)により相関関数の“定常性”は回復する．しかし，非線形波形の情報は失われカオス的遍歴現象(複数のアトラクタの生成・消滅があり異なるアトラクタへの遷移がおこる現象をさす)などが内在する場合には非線形モデルの推定を局所情報を用いて実行することがより重要となる．

5. 確率共鳴

調和振動子が決定論的な相加的な正弦波で駆動されている場合$\ddot{x}+k\dot{x}+\omega_0^2x=f\cos\omega t$，正弦波の周波数$\omega$が調和振動子の特性周波数$\omega_0$と一致すれば共鳴が起こり調和振動子は大きな振幅となることは共鳴現象として知られている．このとき外力の周波数ωをパラメータとして変化させるとxの最大値はω_0で最大となる応答曲線となる．いま決定論的な正弦波を正規白色雑音で置き換えた場合を考えよう．雑音の強度はスペクトルの形には影響せず絶対値のみに効く．観測雑音も常識的には信号のS/N比を下げ，周波数スペクトルのピーク幅を広げるように作用する．しかし，雑音の印加がS/N比を上げ周波数スペクトルのピークを鋭くするように作用する場合がある．2重井戸型などのポテンシャルを持つ非線形振動子が決定論的な外力と雑音の両方の印加がある状況で，かつ，ポテンシャル障壁の高さ，外力の周波数と振幅，雑音の強度がある関係を満足している場合にはこのような常識に反するような現象が起こる．このとき雑音の強度DをパラメータとしてS/N比の値の変化を調べるとS/N比がDの関数として変化し，あるD_pで最大値をとる．これが確率共鳴(Stochastic Resonance)と呼ばれる由縁である．氷河期と温暖期のスイッチング，リングレーザの回転方向スイッチング，ザリガニが外敵バス(マスの一種)の襲来を検出する機構などで知られている(Moss and Wiesenfeld (1995))．精密なモデル化が困難な生物・生態系などの複雑系の現象を大胆な簡単化確率モデルにより解析し実験との定性的な一致をみている点に注目されたい．また，一般化久保振動子でも非白色雑音源の種類や印加される項が散逸項か周波数項かに依存して，上記と同様なS/N比の増加がみられるが，これも確率共鳴に分類されるべきであろう．

6. 位相乱流

久保振動子$\dot{A}=i(\omega_0+\omega_1(t))A$で$\omega_1(t)$が指数相関$\psi(\tau)=\exp(-\gamma\tau)$のとき変数変換$A=r\exp(i\omega_0t+i\phi)$すると位相のブラウン運動$\ddot{\phi}+\gamma\dot{\phi}=F(t)$を得る．この方程式を一般化し位相の非線形振動$\ddot{\phi}+\gamma\dot{\phi}+U(\phi)=F(t)$を考えると様々な複雑なダイナミクスを模擬できる．しかしこのような空間依存性を無視した一般化は複雑な空間的な広がりが大きな系では本質をとらえないことがある．空間依存性を考慮しないモデルは(i)主要な空間モードが1個選択されている(各空間点の運動が同期している)場合，(ii)空間モードを数個選択して残りを捨て

去った場合（ローレンツモデルでは熱対流偏微分結合方程式から速度場を第１モード，温度場を第１と第２モードのみ取り出してきた），(iii)周囲の複雑な運動を１空間点での観測結果に繰り込むことが可能な場合などで有効であった．しかし，空間的に広がった系では各空間点の運動が同期しない状況が出現し位相の拡散・輸送を考慮して確率 Navier-Stokes 方程式

$$\dot{\phi} + \phi\nabla\phi - \mu\nabla^2\phi = f(r,\ t) \tag{6.1}$$

を考えると現実をうまくとらえられる場合がある．位相の運動をこのように拡張することが物理的に妥当であることを確かめるために複素標準型の非線形確率拡散方程式 $\dot{A} = i\omega_0 A + gA - h|A|^2 A + F(r,\ t) + D\nabla^2 A$，ここで，$\langle F_j(r,\ t)\rangle = 0$ $(j = R,\ I)$，$\langle F_j(r,\ t)\, F_k(r',\ t')\rangle = E(r,\ r')\,\delta_{jk}(t - t')$, $g = g_R + ig_I$, $h = g_R + ih_I$, $D = D_R + iD_I$ を考えてみよう．$h_R > 0$ と $D_R > 0$ なる拘束条件は系の大局的安定性を保証するために導入する．振幅と位相に分離する $A(r, t) = R(r, t)\exp(i\Theta(r, t))$ と振幅と位相の相乗結合方程式が得られるが，振幅 R の時空変動が小さいとき新しい変数 $v(r,\ t) = \nabla\Theta(r,\ t)$ を導入すると確率 Navier-Stokes 方程式が得られる：$(\partial/\partial t)\, v = D_R\nabla^2 v - D_I v\nabla v + \nabla F_\Theta(r, t)$ (Konno (1998))．空間パタンの時間変化（主要空間モードの数の変化や時間遷移）を伴う複雑なダイナミクスでは位相と振幅の相乗結合が重要となる．

位相の運動は長時間相関をになう物理的状況と関係するが，ブラウン運動も詳細な実験により記憶のあることが確認されランジュバン方程式は $m^*\dot{V} = -\gamma V - \int_{-\infty}^{t}(\beta/\sqrt{t-t'})\,\dot{V}(t') + F(t)$ と書ける．これはフラクショナル・ブラウン運動の特例である．相関関数 (Kubo (1979)) は

$$\langle V(t)\ V(0)\rangle = \frac{\langle V^2\rangle}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma z^2\exp\left(-\dfrac{z^2}{\tau}t\right)}{(z^2-1)^2+\sigma^2 z^2}dz \tag{6.2}$$

ここに，$\sigma = \pi\beta/m^*$, $\langle V^2\rangle = k_B T/m^*$, $\tau = m^*/\gamma$. 拡散係数は $D = \int_0^\infty dt\langle V(t)\ V(0)\rangle = k_B T/\gamma$. 無限個の連続固有値の分布はブラウン粒子の運動が水分子集団にバック・フローなどの流れの場をつくりだし，それが自分の運動にフィードバック（記憶効果を与える）する状況を表現していると考えられている．もちろん揺らぎは正規（ガウス）分布に従う．

最近，乱流など揺らぎの大きい系で正規分布からのはずれが話題になっている．数学的には大偏差原理や拡張された中心極限定理 (Gnedenko and Kolmogorov (1954)) と関係する．レビ分布とは $P(I, \psi, \gamma) = (1/\pi)\int_0^\infty \exp(-\gamma q^\psi)\cos(qI)\,dq$ と書ける分布で $\psi = 2$ (Gauss)；$\psi = 1$ (Cauchy) の極限分布を含んでいる．心拍の時間間隔分布では $\psi = 1.7$，蛇口から落ちる水滴の時間間隔分布では $\psi = 1.7$ であり，注意深く統計をとらないと正規分布と見分けが付かない．株価指数では $\psi = 1.4$ となり正規分布からのはずれは顕著である．株価指数の正規分布からのはずれとフラクショナル・ブラウン運動は Mandelbrot (1961) らにより盛んにとりあげられてきている．

以上，２つの極限分布（ガウス，レビ）に拘わる現実の非線形ダイナミクスが無限個の連続固有値の分布を問題にしなければならないことを紹介した．同様の事情は上記極限分布を有しない非線形システムにも共通した特性であるのだろうか？　そこで次のような相乗性雑音印加確率微分方程式を考えてみよう．

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,\xi(t) \tag{6.3}$$

を考え，変数変換 $z = \int^x g^{-1}(y)\,dy$ すると Schrödinger 型の方程式：$-(\partial/\partial t)\,\psi(z,\ t) = \{-(D/2)(\partial^2/\partial z^2) + V(z)\}\,\psi(z,\ t)$，ここで $V(z) = (1/2D)\{\gamma(z)^2 + D\gamma'(z)\}$，$\gamma(z) = f(x(z))/$

$g(x(z))$を得る．このようなシステムの場合相関関数は一般に$\langle x(t)\,x(0)\rangle = \sum_{m=1}^{M} \Lambda_m \exp(-\nu_m t) + \int_0^\infty dy \Lambda(y) \exp(-\nu_y t)$のように離散固有値と連続固有値の和で表される．(a) 1個のソリトンのカオス的蛇行運動の場合1個の離散固有値と無限個の連続固有値，(b)局在カオス振動の場合1個の離散固有値と無限個の連続固有値，(c) “ソリトン” の生成・消滅を伴うカオス的運動の場合有限個の時間変化する離散固有値と無限個の連続固有値が関係する．“ソリトン” 系も多種多様であるが外力駆動非線形シュレディンガー方程式$i\phi_t + \phi_{xx} + 2|\phi|^2\phi = -i\gamma\phi + \varepsilon \exp(-i\omega t)$の場合 (Konno and Lomdahl (1995)) でみてゆこう．バックグランドの運動$c(t)$を差し引いた運動を$r(x,t) = \phi(x,t) - c(t)$，で定義すると$ir_t(x,t) + r_{xx} + 2|r|^2 r + 2c|r|^2 + c^* r^2 + 2|c|^2 r + i\gamma r = 0$，ここで，$ic_t + 2|c|^2 c = -i\gamma c - \varepsilon \exp(i\omega t)$，となりパラメータ励振系にほかならない．輻射が系内をランダムに動き回るとバックグランドにランダムな要素が付け加わる．多ソリトンの運動をソリトンの振幅 (固有値) の確率密度関数の時間変化に埋め込んだ解析を行うと上記相乗性雑音印加非線形確率微分方程式で解析が可能になる．

カオス的遍歴の簡単なモデルの例として多モードレーザー，Coupled Map Lattice，カオス・ニューラルネット，脳機能モデル，生態系の人口動態モデルなどがよく知られている．生成・消滅を伴う “ソリトン” 系の場合も “ソリトン” がアトラクタの役割を果たしておりカオス的遍歴現象を示す系の1例となっている．乱流のダイナミクスもたくさんの渦が生成・消滅を繰り返すカオス的遍歴的過程が内在する．最近，シャボン玉などをつくる石鹼膜の中の乱流が高速度カメラで詳細に解析 (Rivera et al. (1998)) された．日常生活の中にも複雑な非線形ダイナミクスが内在しているのである．

7. ま と め

複雑系の解析はたいへん厄介であり理論だけ，実験だけでは片付かないことが多い．まず，実験データを定性的に説明する現象論的非線形確率モデルを統計的データの結果を基に作り上げ，あらゆる統計量について矛盾無い大局的理解が得られるか検討することから始めよう．実体モデルによる数値解析や詳細実験との対応を検討しながら普遍法則の発見，定量化を精密に行ってゆこう．現実問題とのフィードバック過程の繰り返しが予測，制御，応用を可能にすると信ずる．

参 考 文 献

Aizawa, Y. (1982). Global aspects of the dissipative dynamical systems. I, *Progr. Theoret. Phys.*, **68**, 64-84.

Gnedenko, B. V. and Kolmogorov, A. N. (1954). *Limit distributions for sums of independent random variables* (translated from Russian), Addison-Wesley, Cambridge.

Konno, H. (1998). Stochastic nonlinear dynamics and instability theory, *Nuclear Science and Technology Series* (eds. J. D. Lewins and M. Becker), Vol. 24, Plenum, New York.

Konno, H. and Kanemoto, S. (1998). Effect of multiplicative noise on decay ratio, *Annals of Nuclear Energy*, **25**, 541-545.

Konno, H. and Kanemoto, S. (1999). Parametric stochastic stability and decay ratio for a stochastic nonlinear BWR model below the Hopf bifurcation, *Annals of Nuclear Energy*, **26** (in press).

Konno, H. and Lomdahl, P. S. (1995). Statistical mechanics of soliton creation and annihilation in a driven nonlinear Schrödinger equation, *Phys. Lett. A*, **193**, 35-41.

Konno, H. and Ohtomo, N. (1998). On the non-stationarity for the Rössler equation (unpublished).

Kubo, R. (1963). Stochastic Liouville equations, *J. Math. Phys.*, **4**, 174-183.

Kubo, R. (1979). 非可逆過程と確率過程，数理解析研究所講究録，**367**, 50-93.

Mandelbrot, B. (1961). The variation of certain speculative prices, *J. Business*, **36**, 394-419.
森　肇，蔵本由紀 (1994). 『散逸構造とカオス』，岩波講座 現代の物理学，15巻，岩波書店，東京.
Moss, F. and Wiesenfeld, K. (1995). The benefits of background noise, *Scientific American*, August, 66-69.
Ott, E. . (1993). *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.
Rivera, M., Vorobieff, P. and Ecke, R. E. (1998). Turbulence in flowing soap films : Velocity, vorticity, and thickness fields, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 1471-1420.
Tomita, K. (1984). The significance of the concept of chaos, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, **79**, 1-25.