統計数理 (1999)
第 47 巻 第 1 号 63-69

特集「統計基礎理論」
[研究ノート]

不変確率モデルの特徴付け

統計数理研究所* 紙 屋 英 彦

(受付 1998 年 8 月 12 日；改訂 1998 年 12 月 7 日)

要 旨

不変性に基づく統計的推測理論に於いては，通常，基礎となる分布が不変確率モデルと呼ばれる分布族に属するという仮定の下で，議論が展開される．本稿では，不変確率モデルの特徴付けの問題を取り上げる．そして，標本空間・パラメタ空間が作用群と同型ではない一般的な設定に於いて，密度関数の関数形を明示的に指定するという形で，不変確率モデルの特徴付けを与える．

キーワード：不変確率モデル，群の作用，軌道，グローバル・クロス・セクション，オービタル分解，最大不変量．

1. はじめに

共変推定・不変検定等，不変性に基づく統計的推測理論に於いては，不変確率モデル (invariant probability model, Eaton (1983)) と呼ばれる分布のクラスが基礎となる (Lehmann (1986), Lehmann and Casella (1998), 鍋谷 (1978))．これは別名，複合変換モデル (composite transformation model, Barndorff-Nielsen (1988)) とも呼ばれ，これについては Barndorff-Nielsen らによる一連の研究がある (Barndorff-Nielsen et al. (1982), Barndorff-Nielsen et al. (1989), Eriksen (1984))．本稿では，不変確率モデルの特徴付けの問題を考え，密度関数の関数形を明示的に指定するという形での特徴付けを与える．

標本空間 $\mathcal{X}$ に，ある群 $\mathcal{G}$ が (可測に) 作用しているとする：$(g, x) \mapsto gx$．このとき，$\mathcal{X}$ 上の確率測度の全体 $\mathcal{P}$ への $\mathcal{G}$ の作用が，$(g, P) \mapsto gP, (gP)(\cdot) := P(g^{-1}\cdot)$ により自然に誘導される．サブクラス $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ がこの作用の下で不変 ($g \in \mathcal{G}, P \in \mathcal{P}_0 \Rightarrow gP \in \mathcal{P}_0$) なとき，$\mathcal{P}_0$ は不変確率モデル，或いは複合変換モデルと呼ばれる．特に，任意の $P \in \mathcal{P}$ から生成されるグループ・ファミリー (group family, Lehmann and Casella (1998)) $\mathcal{P}_0 := \{gP | g \in \mathcal{G}\}$ は，$\mathcal{G}$ の $\mathcal{P}$ への作用の下での一つの軌道 $\mathcal{G}P$ を成すため，明らかに不変確率モデルとなる．しかし一般には，不変確率モデルは，複数の軌道の和集合となっている．

Θ をパラメタ空間とし，$\theta \in \Theta$ によりパラメトライズされた密度の族 $\mathcal{D}_0 = \{p(\cdot|\theta) | \theta \in \Theta\}$ を考える．ただし密度は，χ をマルティプライア (multiplier) とする相対不変測度 λ ($\lambda(dgx) = \chi(g)\lambda(dx)$) に関するものとする．また，$\mathcal{G}$ は Θ へも作用しているとする：$(g, \theta) \mapsto g\theta$．このとき，$\mathcal{D}_0$ に対応する確率測度の族 $\mathcal{P}_0 := \{P_\theta | \theta \in \Theta\}$, $dP_\theta := p(\cdot|\theta)\, d\lambda$ が不変確率モデルとなる条件を考える．

* 現 岡山大学 経済学部：〒700-8530 岡山市津島中 3-1-1.

例として，Mallows モデル (Critchlow (1985)) を考える．すなわち，$\mathcal{X}=\Theta=S_n$ (n 次対称群) とし，次の $p(\cdot|\theta)$ を確率関数とする離散分布 P_θ の族 $\mathcal{P}_0$ を考える：$p(x|\theta)=Ce^{-\kappa d(x,\theta)}$．ただし $\kappa>0$ は集中パラメタで既知，C は基準化定数 $C=C(\kappa)=1/\sum_{x\in S_n}e^{-\kappa d(x,\theta)}$，また d は S_n 上の左不変な距離 ($d(\pi\pi_1,\pi\pi_2)=d(\pi_1,\pi_2)$，$\pi,\pi_1,\pi_2\in S_n$) とする．ここで $\mathcal{G}=S_n$ とし，S_n の積 gx，$g\theta$ による $\mathcal{X}$，Θ への作用を考える．このとき，$gP_\theta=P_{g\theta}$ となり，従って $\mathcal{P}_0$ は不変確率モデルとなる．このことは $d(x,\theta)$ が $\theta^{-1}x$ のみに依存することから明らかであるが，逆に，ある確率関数族 $\mathcal{D}_0=\{p(\cdot|\theta)|\theta\in\Theta\}$ が与えられたとき，上に述べたのと同じ作用の下で，$gP_\theta=P_{g\theta}$ が成り立ち従って $\mathcal{P}_0$ が不変確率モデルを成すのは，$p(x|\theta)$ が $p(x|\theta)=q(\theta^{-1}x)$ の形に書ける場合に限ることもすぐに分かる．

上の例では，i) $\mathcal{G}$ の $\mathcal{X}$，Θ への作用が共に，自由かつ推移的，すなわち $\mathcal{G}=\mathcal{X}=\Theta$ と見做せること，及び，ii) x の分布が離散分布であるため，支配測度が計数測度であり従って不変測度となっていること，の二点により，議論が単純になっている．本稿では，この二点が必ずしも成り立たない一般の場合に於いて，不変確率モデルの特徴付けを考える．

これに関して次のことが知られている (Eaton (1983, 1989))：

$$p(x|\theta)=p(gx|g\theta)\,\chi(g),\qquad x\in\mathcal{X},\,\theta\in\Theta,\,g\in\mathcal{G}, \tag{1.1}$$

が成り立つとき，密度族 $\mathcal{D}_0=\{p(\cdot|\theta)|\theta\in\Theta\}$ は χ-不変であると言われる．$\mathcal{D}_0$ が χ-不変なとき，それに対応する $\mathcal{P}_0$ は不変確率モデルとなる．またこのとき，$gP_\theta=P_{g\theta}$ となる (ただし，この逆は厳密には成り立たない (Eaton (1989), p. 44))．

本稿では次章において，グローバル・クロス・セクション (global cross section) $\Theta_0\subset\Theta$ の存在の仮定の下で，χ-不変な密度族の次のような特徴付けを導く：$p(x|\theta)$ が (1.1) の性質を持つためには，ある関数 $q(\cdot,\cdot)$ に対して $p(x|\theta)$ が

$$p(x|\theta)=\frac{1}{\chi(g_\theta)}q(s(g_\theta^{-1}x),\,t(\theta))$$

と書けることが必要十分である．ここで g_θ は，$\theta=g_\theta\vartheta$，$g_\theta\in\mathcal{G}$，$\vartheta\in\Theta_0$ を満たす $\mathcal{G}$ の任意の元，また s，t はそれぞれ，$\mathcal{K}$ の $\mathcal{X}$ への作用，$\mathcal{G}$ の Θ への作用の下での最大不変量とする．ただし $\mathcal{K}$ は，Θ_0 上で共通な $\mathcal{G}$ の固定部分群である．この結果から，所与の不変性構造，すなわち $\mathcal{G}$ の $\mathcal{X}$，Θ への作用に対し，可積分性 $\forall\vartheta\in\Theta_0:\int q(s(x),t(\vartheta))\,\lambda(dx)=1$ を満たす関数 q の多様性と丁度同じだけ，多様な不変確率モデルが存在することが分かる．

第3章では例として，Eaton (1989)，Example 3.4 にある多変量正規分布に関連した作用，及び Murray and Rice (1993)，Example 3.4.9 にある von Mises-Fisher 分布に関連した作用を取り上げる．特に前者に於いては，楕円型分布族が，アファイン変換群の下での不変確率モデルとして特徴付けられる．この場合，上の関数 q は楕円型分布族のいわゆる密度ジェネレイタに相当し，従って，アファイン変換群の下での不変確率モデルを一つ選択することは，楕円型分布族に於ける密度ジェネレイタを一つ指定することに対応する．

2. 結　　果

本章では，グローバル・クロス・セクション Θ_0 の存在の仮定の下で，χ-不変な密度族の特徴付けを与える．まず，その際に必要となるオービタル分解 (orbital decomposition) について，簡単に説明する．

$\mathcal{G}$ の Θ への作用について考える．

Θ の部分集合 Θ_0 で，各軌道 $\mathcal{G}\theta=\{g\theta|g\in\mathcal{G}\}$ と丁度一点で交わるものを，クロス・セクショ

ン (cross section) という．特に，その上で固定部分群がすべて共通 $\forall\theta\in\Theta_0:\mathcal{G}_\theta:=\{g\in\mathcal{G}\,|g\theta=\theta\}=\mathcal{K}$(say) となるようなクロス・セクション Θ_0 を，グローバル・クロス・セクションと呼ぶ．

グローバル・クロス・セクション Θ_0 が存在するときには，一対一対応として Θ を次のように分解することができる：

$$\theta\longleftrightarrow(g_\theta\mathcal{K},\,\mathcal{G}\theta),\qquad \theta=g_\theta\vartheta,\ g_\theta\in\mathcal{G},\ \vartheta\in\Theta_0.$$

このような分解を，Θ 或いは θ のオービタル分解と呼び，$g_\theta\mathcal{K}$，$\mathcal{G}\theta$ をそれぞれ，θ の共変部分，不変部分という．

以上の準備の下で，本稿の主要結果を述べる．

定理． $\mathcal{X}$ は局所コンパクト・ハウスドルフ空間，$\mathcal{G}$ は局所コンパクト・ハウスドルフ位相群，$\mathcal{G}$ の $\mathcal{X}$ への作用は連続とする．また，$\mathcal{G}$ の Θ への作用の下で，グローバル・クロス・セクション Θ_0 が存在すると仮定する：$\forall\theta\in\Theta_0$: $\mathcal{G}_\theta=\mathcal{K}$．さらにここで，$\mathcal{K}$ はコンパクトであるとする．このとき，密度族 $\mathcal{D}_0=\{p(\cdot|\theta)\,|\theta\in\Theta\}$ が χ-不変となるための必要十分条件は，ある関数 $q(\cdot,\cdot)$ が存在して $p(x|\theta)$ が

(2.1)
$$p(x|\theta)=\frac{1}{\chi(g_\theta)}q(\mathcal{K}g_\theta^{-1}x,\,\mathcal{G}\theta)$$

の形に書けることである．

注 1. ここでの仮定のもとでは，$\mathcal{K}$ はコンパクト，χ は $\mathcal{G}$ から正の実数全体の成す乗法群への連続準同型となることから，$\chi(g_\theta)$ は θ の共変部分 $g_\theta\mathcal{K}$ からの代表元の取り方に依存しない．

注 2. $\mathcal{K}g_\theta^{-1}x$ は $\mathcal{K}$ の $\mathcal{X}$ への作用の下での $g_\theta^{-1}x$ の軌道と見做せる．これより，上の定理を実際に用いるときには，この作用の下での最大不変量 $s(x)$ と，$\mathcal{G}$ の Θ への作用の下での最大不変量 $t(\theta)$ を用いて，(2.1) 式の右辺の $\mathcal{K}g_\theta^{-1}x$，$\mathcal{G}\theta$ をそれぞれ，$s(g_\theta^{-1}x)$，$t(\theta)$ で置き換えてよい．

証明．

$$\bar{p}(x,\theta):=p(x|\theta)\,\chi(g_\theta)$$

とおく．このとき (1.1) は，

(2.2)
$$\bar{p}(x,\theta)=\bar{p}(gx,g\theta),\qquad x\in\mathcal{X},\ \theta\in\Theta,\ g\in\mathcal{G},$$

と同値となる．

条件 (2.2) は，$\bar{p}$ が対角作用

(2.3)
$$(g,(x,\theta))\mapsto g(x,\theta):=(gx,g\theta)$$

の下で不変であることを意味する．従って，$\mathcal{D}_0$ が χ-不変であるための必要十分条件は，$\bar{p}(x,\theta)$ が (2.3) の下での最大不変量 $m(x,\theta)$ の関数として，$\bar{p}(x,\theta)=q(m(x,\theta))$ の形に書けることとなる．そこで，m を具体的に求めればよい．

補題. $m(x,\theta):=(\mathcal{K}g_\theta^{-1}x,\ \mathcal{G}\theta)$ は，(2.3) の下での最大不変量となる．

補題の証明. 不変性は明らかなので，最大性を示す．
$x_1, x_2\in\mathcal{X}$, $\theta_1, \theta_2\in\Theta$ に対し

$$(\mathcal{K}g_{\theta_1}^{-1}x_1,\ \mathcal{G}\theta_1)=(\mathcal{K}g_{\theta_2}^{-1}x_2,\ \mathcal{G}\theta_2) \tag{2.4}$$

が成り立つとする．この下で，ある $g\in\mathcal{G}$ に対して

$$(x_1,\ \theta_1)=g(x_2,\ \theta_2) \tag{2.5}$$

となることを示せばよい．

まず (2.4) より，ある $k\in\mathcal{K}$ が存在して $x_1=g_{\theta_1}kg_{\theta_2}^{-1}x_2$ と書ける．

一方，$g_{\theta_1}kg_{\theta_2}^{-1}(g_{\theta_2}\mathcal{K})=g_{\theta_1}\mathcal{K}$ と $\mathcal{G}\theta_2=\mathcal{G}\theta_1$ より，$g_{\theta_1}kg_{\theta_2}^{-1}\theta_2\longleftrightarrow(g_{\theta_1}kg_{\theta_2}^{-1}(g_{\theta_2}\mathcal{K}),\ \mathcal{G}\theta_2)=(g_{\theta_1}\mathcal{K},\ \mathcal{G}\theta_1)\longleftrightarrow\theta_1$，従って $\theta_1=g_{\theta_1}kg_{\theta_2}^{-1}\theta_2$ である．

故に $(x_1,\ \theta_1)=g_{\theta_1}kg_{\theta_2}^{-1}(x_2,\ \theta_2)$ となり，(2.5) が示された．

上の補題を用いれば，先の議論より，$\mathcal{D}_0$ が χ-不変となるためには，$\bar{p}$ が $\bar{p}(x,\ \theta)=q(\mathcal{K}g_\theta^{-1}x, \mathcal{G}\theta)$ の形，すなわち p が $p(x,\theta)=\chi(g_\theta)^{-1}q(\mathcal{K}g_\theta^{-1}x,\mathcal{G}\theta)$ の形に書けることが，必要十分となる．

さらに，$\mathcal{G}$ の $\mathcal{X}$ への作用の下でもグローバル・クロス・セクション $\mathcal{X}_0$ が存在してオービタル分解 $x\longleftrightarrow(g_x\mathcal{H},\mathcal{G}x)$ が可能な場合には，一対一対応 $\mathcal{K}g_\theta^{-1}x\longleftrightarrow(\mathcal{K}g_\theta^{-1}g_x\mathcal{H},\mathcal{G}x)$ が成り立つ．ただしここで，$\mathcal{H}$ は $\mathcal{X}_0$ 上で共通な固定部分群である．これよりこの場合は，次の系のように，$\mathcal{X}$ と Θ に関して ($\chi(g_\theta)^{-1}$ の部分を除けば) 対称な表現も可能となる．

系. 定理の仮定の下で，さらに $\mathcal{G}$ の $\mathcal{X}$ への作用の下でもグローバル・クロス・セクション $\mathcal{X}_0$ が存在すると仮定する：$\forall x\in\mathcal{X}_0:\mathcal{G}_x=\mathcal{H}$．このとき，$\mathcal{D}_0$ が χ-不変となるためには，$p(x|\theta)$ が

$$p(x|\theta)=\frac{1}{\chi(g_\theta)}q(\mathcal{K}g_\theta^{-1}g_x\mathcal{H},\ \mathcal{G}x,\ \mathcal{G}\theta)$$

の形に書けることが必要十分である．

$\mathcal{X}$, Θ が等質空間の場合の対角作用に関する結果 (例えば寺田・原田 (1997)，補題 1.84) を等質空間でない場合に拡張したものを用いれば，この系は，上の定理を経ずに直接示すこともできる．

3. 例

例 1. (Eaton (1989), Example 3.4) $\mathcal{X}=R^p$, $\Theta=R^p\times PD(p)$, $\mathcal{G}=GA(p)$ とし，次の作用を考える：$g=(C,\boldsymbol{d})\in\mathcal{G}$, $x=\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}$, $\theta=(\boldsymbol{\mu},\Sigma)\in\Theta$ に対し，$gx:=C\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}$, $g\theta:=(C\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{d}, C\Sigma C^T)$．ただし，$PD(p)$ は $p\times p$ の正定値行列の全体，$GA(p)$ は p 次の一般アファイン群 $GL(p)\ltimes R^p$ (加法群 R^p の一般線形群 $GL(p)$ による半直積で，付随する $GL(p)$ の R^p への作用として，$GL(p)$ の元の線形変換としての作用を取ったもの) を表すものとする．

このとき，ルベーグ測度 $d\boldsymbol{x}$ が $\chi(g)=\det C$, $g=(C,\boldsymbol{d})$ をマルティプライアとする相対不

変測度となり，$d\boldsymbol{x}$ に関する p 変量正規密度の全体が χ-不変となることは明らかである．

ここでは逆に，$d\boldsymbol{x}$ に関するある密度族 $\mathcal{D}_0=\{p(\cdot|\boldsymbol{\mu},\Sigma)\,|\,(\boldsymbol{\mu},\Sigma)\in GA(p)\}$ が与えられたとき，これが上の作用の下で χ-不変な密度族となるための条件を考える．

$\mathcal{G}$ の Θ への作用は推移的であるので，その下で Θ は自明にオービタル分解可能であり，代表元 $\theta_0=(\mathbf{0},I)$ に関して，$\mathcal{K}=\mathcal{G}_{\theta_0}=\{(B,\mathbf{0})\,|B\in\mathcal{O}(p)\}\simeq\mathcal{O}(p)$，また任意の $\theta=(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ は $\theta=g_\theta\theta_0$，$g_\theta=(\Sigma^{1/2},\boldsymbol{\mu})$ と表される．ただし，I は単位行列，$\mathcal{O}(p)$ は p 次の直交群，$\Sigma^{1/2}$ は Σ の正定値平方根を表す．

故に，前章の定理と注 2 から，密度族 $\mathcal{D}_0=\{p(\cdot|\boldsymbol{\mu},\Sigma)\,|\,(\boldsymbol{\mu},\Sigma)\in GA(p)\}$ が χ-不変となることは，密度関数 $p(\cdot|\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ が

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\Sigma)=\frac{1}{(\det\Sigma)^{1/2}}\,q(\|\Sigma^{-1/2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\|^2)$$

の形をしていることと同値となる．

以上より，一つの χ-不変な密度族 $\mathcal{D}_0$ は，ある q を密度ジェネレイタとする楕円型分布族と一致することが分かる．特に $q(y)=(2\pi)^{-p/2}e^{-y/2}$ の場合が，p 変量正規分布に当たる．

例 2. (Murray and Rice (1993), Example 3.4.9) $\mathcal{X}=S^{p-1}$，$\Theta=R^p-\{\mathbf{0}\}$，$\mathcal{G}=\mathcal{SO}(p)$ とする．ただし S^{p-1} は $p-1$ 次元単位球面，$\mathcal{SO}(p)$ は p 次の特殊直交群とする．また $\mathcal{G}$ の $\mathcal{X}$，Θ への作用を，行列とベクトルの通常の積 $B\boldsymbol{x}$，$B\boldsymbol{\mu}$ $(B\in\mathcal{G},\boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\boldsymbol{\mu}\in\Theta)$ によって定義する．

このとき，S^{p-1} の体積要素 $d\lambda(\boldsymbol{x})$ に関する密度の族 $\mathcal{D}_0=\{p(\cdot|\boldsymbol{\mu})\,|\boldsymbol{\mu}\in\Theta\}$ について，χ-不変性の特徴付けを考える．ここでは λ が不変測度 $(\chi=1)$ となっているため，χ-不変性は単に不変性と呼ぶことにする．

この場合は $\mathcal{G}$ の Θ への作用は推移的ではないが，グローバル・クロス・セクション $\Theta_0=\{(r,0,\ldots,0)^T|r>0\}$ に関し，Θ は次のようにオービタル分解される：$\boldsymbol{\mu}\longleftrightarrow(B_\mu\mathcal{K},\mathcal{G}\boldsymbol{\mu})\longleftrightarrow(\boldsymbol{\mu}/\|\boldsymbol{\mu}\|,\|\boldsymbol{\mu}\|)$．ここで $B_\mu\in\mathcal{SO}(p)$ は，適当な C_μ: $p\times(p-1)$ を用いて $B_\mu=(\boldsymbol{\mu}/\|\boldsymbol{\mu}\|,C_\mu)$ と表される．また $\mathcal{K}$ は，

$$\mathcal{K}=\left\{\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}^T\\\mathbf{0}&L\end{pmatrix}\middle|\,L\in\mathcal{SO}(p-1)\right\}\simeq\mathcal{SO}(p-1)$$

となる．

これより

$$B_\mu^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\left(\dfrac{\boldsymbol{\mu}}{\|\boldsymbol{\mu}\|}\right)^T\boldsymbol{x}\\C_\mu^T\boldsymbol{x}\end{pmatrix}$$

と書け，また $\mathcal{K}$ の $\mathcal{X}$ への作用の下での最大不変量として $s(\boldsymbol{x})=x_1$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_p)^T$ が取れることから，$\mathcal{K}B_\mu^{-1}\boldsymbol{x}\longleftrightarrow(\boldsymbol{\mu}/\|\boldsymbol{\mu}\|)^T\boldsymbol{x}$ となることが分かる．

以上より，$\mathcal{D}_0$ の不変性は，$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu})$ の

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu})=q\left(\left(\frac{\boldsymbol{\mu}}{\|\boldsymbol{\mu}\|}\right)^T\boldsymbol{x},\,\|\boldsymbol{\mu}\|\right)\tag{3.1}$$

という関数形によって特徴付けられることが分かる．

(3.1) に於いて特に $q(a,b)=c(b)\exp(ba)$ と取った場合が，von Mises-Fisher 分布となる．

その場合，$\boldsymbol{\mu}/\|\boldsymbol{\mu}\|$, $\|\boldsymbol{\mu}\|$ はそれぞれ，いわゆる平均方向，集中パラメタに相当する．

謝　辞

有益なコメントを頂いた査読者に，感謝致します．

参 考 文 献

Barndorff-Nielsen, O. E. (1988). *Parametric Statistical Models and Likelihood*, Lecture Notes in Statist., **50**, Springer, New York.

Barndorff-Nielsen, O. E., Blæsild, P., Jensen, J. L. and Jørgensen, B. (1982). Exponential transformation models, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **379**, 41-65.

Barndorff-Nielsen, O. E., Blæsild, P. and Eriksen, P. S. (1989). *Decomposition and Invariance of Measures, and Statistical Transformation Models*, Lecture Notes in Statist., **58**, Springer, New York.

Critchlow, D. E. (1985). *Metric Methods for Analyzing Partially Ranked Data*, Lecture Notes in Statist., **34**, Springer, New York.

Eaton, M. L. (1983). *Multivariate Statistics: A Vector Space Approach*, Wiley, New York.

Eaton, M. L. (1989). *Group Invariance Applications in Statistics*, Regional Conference Series in Probability and Statistics, Vol. 1, Institute of Mathematical Statistics and American Statistical Association, Hayward and Alexandria.

Eriksen, P. S. (1984). $(k, 1)$ exponential transformation models, *Scand. J. Statist.*, **11**, 129-145.

Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses*, 2nd ed., Wiley, New York.

Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*, 2nd ed., Springer, New York.

Murray, M. K. and Rice, J. W. (1993). *Differential Geometry and Statistics*, Chapman & Hall, London.

鍋谷清治 (1978).『数理統計学』, 共立出版, 東京.

寺田 至, 原田耕一郎 (1997).『群論 (岩波講座 現代数学の基礎)』, 岩波書店, 東京.

Characterization of Invariant Probability Models

Hidehiko Kamiya

(The Institute of Statistical Mathematics)

Theory of statistical inference from the point of view of invariance is based on the assumption that the underlying distributions belong to the so-called invariant probability models. This paper deals with the problem of characterization of invariant probability models. In the general setting where neither the sample space nor the parameter space is isomorphic to the acting group, a characterization is given in terms of the functional form of the densities.

Key words: Invariant probability model, group action, orbit, global cross section, orbital decomposition, maximal invariant.