統計数理 (1999)
第 47 巻 第 1 号 243-248

公開講演会要旨

日常の中の非線形性

統計数理研究所　田　村　義　保

(受付 1998 年 11 月 4 日, 統計数理研究所　講堂)

1. はじめに

非線形という言葉を耳にする機会が増えている. 非線形は線形の否定形なので, 線形の定義なしに非線形の定義は不可能である. このため, 線形という言葉の説明から始める. 現象, 対象を数学的に表した時, 注目している変数あるいは係数 (パラメータ) の足し算, 引き算だけで式を表すことができる場合 (もちろん, 変数と係数の積は含まれていてもよい), それらの式は線形と呼ばれる. 統計科学の分野では, 重回帰分析, 主成分分析は線形モデルの代表選手である. 非線形回帰 (多項式回帰) には, 非線形という形容詞がついているので, 非線形モデルと思われがちである. しかし, 説明変数について二乗の項や三乗の項があるために非線形と呼ばれているだけで, 統計的推測の対象になる係数 (パラメータ) については線形であり, 数学的な取扱いは線形モデルである重回帰分析の場合と同じである.

非線形は線形の否定である. 従って, 線形でないもの全てということになる. 容易に推測できるように, 非線形が関係していることの方が多くある. 最近, 巷間を賑わしている複雑系は非線形性と密接に関係している. カオスも同様である. 線形であるようなシステムなら初期値の少しの違いは時間に比例して拡大していくだけであるが, 非線形システムの場合は, 初期値が少し違えばその変化が指数関数的に拡大していく. このように, 時間的な振る舞いが複雑になるだけではなく, 空間的なパターンも非線形と強く関係している. ベルナール対流というのが物理学でよく知られている. 熱流体の方程式に非線形項を含めることで数学的に説明ができるが, このパターンは日常でもみそ汁の表面の模様として現れている. 動物の体表面の縞模様も何らかの非線形性が関係していると考えられている. 株価の複雑な値動きも非線形モデルで取り扱う研究者もいる. 日常に現れる複雑であり, 予測しがたく, 少しの違いが大きく広がっていくような現象には非線形が関係している. 我々の周りには複雑系やカオスで扱われている非線形性が満ちあふれており, 線形な現象よりお馴染みであると言える.

2. 種々の非線形現象

本節では非線形性があることがその本質となるような種々の現象について説明していく. 非線形性が本質と書いたが, 現象を説明するために数学的モデルを用いる場合, 前節で説明した非線形的な構造を数学的モデルが持っているということであり, 非線形的な構造なしでは現象を説明できないということが重要である.

2.1 単振動とリミットサイクル

ある一定の時間間隔 (周期) で状態 (位置, 速度) を繰り返す周期現象として単振動がよく知

られている．質量 m [kg]，バネ定数 k [N/m] を持つバネの運動方程式はバネの変位を x [m] とする時，次のようになる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

この方程式は周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

を有する三角関数を解に持つ．このように線形方程式で表される周期現象もあるが，リミットサイクルと呼ばれている非線形性が関係する周期現象もある．餌食-捕食者の振る舞いを表す数学モデルとして有名なロトカ・ボルテラモデルがある．x を餌食の個体数，y を捕食者の個体数とする時，次の連立微分方程式を考える．

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx - cy)\,x$$
$$\frac{dy}{dt} = (-d + ex)\,y$$

上記の式は餌食の個体数はロジスッティックモデルに従い増加するが，捕食者により捕食されることにより減少すること，捕食者の個体数は餌食がいない限り減少して死滅することを意味している．餌食の個体数の非線形項 x^2 がない場合でも，係数 a，c，d，e の値によっては，どのような初期条件（時刻 $t = 0$ での x，y の値）から出発しても時間がたつとある周期軌道（xy-平面上に描いた (x, y) の時間発展）に近づいていくことがある．このような場合に周期軌道をリミットサイクルという．リミットサイクルが現れるのに重要な働きをするのは xy という形の非線形項である．時間を離散化して上記の方程式を差分方程式とした場合はカオスが現れる．2変数の連立微分方程式ではカオスにはならず，安定点に近づいていくか，不安定点から離れていくか，リミットサイクルに近づいていくかのいずれかの時間発展しかしないことを述べておく．リミットサイクルは，個体数の時間変化だけでなく，生体のいわゆるペースメーカ細胞の応答や，需要・供給曲線のダイナミックな取扱いでも考えられることがあり，非線形性に起因する周期現象を説明するための重要な概念である．

2.2 非線形振動子

先に述べたバネの運動方程式はフックの法則で表される線形の復元力のみを考えている．速度に比例する摩擦力 $-a(dx/dt)$ と外力 $f(t)$ を考えると運動方程式は次のようになる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a\frac{dx}{dt} - kx + f(t)$$

この方程式は線形であるが，$f(t)$ が周期的外力である場合，共振現象を引き起こすことがある．共振自体興味ある現象であるが，非線形項を導入することにより，さらに興味深い現象が起こる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a\frac{dx}{dt} - kx - cx^3 + f(t)$$

この式は Duffing 方程式と呼ばれている．パラメータの値によっては上田アトラクターと呼ばれているカオス的振る舞いをする．上田氏はアナログコンピュータを使ったシミュレーション

でカオスを発見している．2階の非線形微分方程式であり，当然相空間の次元は2である．相空間の次元が3でないと連続時間の非線形微分方程式ではカオスが存在しないはずであると思われるかもしれない．Duffing 振動子で，カオスになるのは外力を加えることにより，3次元の相空間とみなせるからである．とにかく，線形な力だけでは共振現象や減衰振動しか現れないが，3次式で表される力を加えただけでカオス的な振る舞いをするようになるのである．バネでも少し変位が大きくなればフックの法則に従う線形項だけでなく非線形項も考える必要が生じることを考えると，カオス的な振る舞いはどこにでも現れる可能性があるものということができる．

2.3 メイのカオス

カオスという言葉をここまでに何度も用いて来た．カオスとは何ですかという問いに対する答えは「決定論的な方程式（力学系）から生じる一見ランダムで複雑な現象」になると思われる．もっとも有名なカオスはメイがロジスティック方程式の離散化により見いだしたものであろう．

ある生物の個体数を x とする時，マルサスは次のような個体数の変化の方程式を提案した．

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

この方程式の解は個体数が指数関数的に増加するという現実離れしたものとなる．ヴェルハルストは2次の非線形項を入れることにより，時間が無限大になっても，発散しない解を与えるロジスティック方程式を提案した．

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)\,x$$

この微分方程式の解は容易に求めることができる．

$$x = \frac{ace^{at}}{1 + bce^{at}}$$

ただし，個体数の初期値を x_0 とすると c は次のようになる．

$$c = \frac{x_0}{a - bx_0}$$

ヴェルハルストは方程式に非線形項を入れることにより，時間が無限大になると飽和値 a/b に近づく解を得ることができたが，規則的な振る舞いであり，カオスと呼ばれるような振る舞いも，ヨツモンマメゾウ虫の世代ごとの個体数変化に現れるような周期的な振る舞いも説明することができない．メイはロジスティック方程式の離散化を考えている．ロジスティック方程式を時刻 Δt ごとに離散化することを考える．時刻 $n(\Delta t)$ における値を $x(n\Delta t) = x_n$ とすると

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = (a - bx_n)\,x_n$$

がロジスティック方程式のオイラー差分になる．

$$r = 1 + a\Delta t\,, \qquad \frac{b\Delta t x_n}{1 + a\Delta t} = y_n$$

とおくことにより

$$y_n = ry_n(1 - y_n)$$

となる．この式をロジスティック方程式の離散近似と考えるならば r は 1 よりわずかに大きな値しかとらず，n を大きくすると y_n は単調増大して飽和値 $1 - 1/r$ に近づいていくようになる．メイの発見は r を 2 より大きくしたことに始まる．$2 < r \leq 3$ の場合は単調ではなく振動しながら飽和値に近づいていく解を見つけた．さらに，$3 < r \leq 1 + \sqrt{6}$ の場合は，2 周期解となり，r が $1 + \sqrt{6}$ を超えると，2 周期解，4 周期解と順に現れていき，ある臨界値 r_c を超えるとランダムな変動をすることを見いだした．

周期解とカオスの関係についてはリー・ヨークの定理があり，周期倍分岐ルートについてはファイゲンバウムの不偏定数が関係している．ロジスティック方程式についてだけでなく 1 次元の離散力学系に対して一般的になりたつ定理であり，カオスを考える際の最も基本の定理の一つである．このような定理や普遍定数を見いだすことは数理科学の偉大な成果であるが，肝腎なことは，非線形項を持っていることであり，離散的な力学系を考える場合，適当な形の非線形項があれば周期的な振る舞いや全くランダムな振る舞いをすることは興味深いことである．しかも，方程式の形が同じでも，係数のわずかな違いで振る舞いが全く違うようになることはより興味をひくことである．「初期値のわずかな違いが時間とともに大きな違いを生じる」というカオスの書物で多く見られる表現より，「パラメータのわずかの違いで，周期的になったりランダムになったりと時間変化パターンが大きく変わる」という表現の方がカオスには似合っているように思われる．

2.4　ベルナール対流

みそ汁やポタージュスープなどの表面に縞模様ができることを経験された方は多いであろう．この現象を物理学的な実験装置で再現することを考える．2 枚の水平平行平板間に流体を入れ，下部から加熱した場合，水平平板間の温度差がある値を超えると，対流（レイリー・ベルナール対流と呼ばれている）が現れることがよく知られている．基礎方程式としてはナビエ・ストークス方程式，熱輸送の方程式，連続の方程式であるが，これらの方程式が持つ非線形性が関係した現象である．実験条件によってはロールと呼ばれている対流が現れたりカオス的な振る舞いをしたりする．なにげなく見落としてしまいそうなみそ汁の表面の模様も非線形性と関係しているのである．非線形性の海の中で生きていると言っても過言でないと思われる我々が新しい発見をできるかどうかは，見えているものにどれだけ興味を示すかによると思う．

対流はこのような小さな実験装置の中だけでなく大気中でも起こっている．ローレンツモデルは大気の動きをたかだか 3 変数の連立微分方程式で表したものである．

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(-X + Y)$$
$$\frac{dY}{dt} = rx - Y - XZ$$
$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ$$

実に簡単なモデルである．非線形性は 2 番目，3 番目の方程式に，それぞれ XZ，XY という形で入っているだけである．しかし，初期条件がわずかに違っている場合，その違いは時間とともに指数関数的に増大していくような振る舞いをする．ローレンツアトラクターと呼ばれているカオス的変動を示す．ローレンツモデルは大気のモデルとして非常に簡単であるが，非線形性を含めたために大気の動きの複雑性を示すことができるようになっている．非線形性，恐る

べしと言っても良いのかもしれない.

2.5 その他の非線形現象

非線形性が関係している現象について説明してきた. 我々の周りに非線形性が関係している現象は他にも多くある. ソリトンと呼ばれている非線形波動もその一つである. 最初のソリトンの発見はエジンバラ郊外の運河でラッセルが見つけた波であるが, 戸田格子でのソリトンのように物理 (数学) モデル上でのソリトンもあるし, 餌食と捕食者の連鎖 (いわゆる食物連鎖) に見られる個体数のソリトン的変動もある.

BZ 反応と呼ばれている化学反応系に現れる時空間パターンも拡散化学反応方程式の中に含まれる非線形性が関係している. 数学的には同様のモデルでシマウマや豹の模様を説明しようとする研究もあり, 自然界のパターンと非線形性には大きな関係がある.

複雑系の書物によく登場する二重振り子も非線形性と大きく関係している. 二つの振り子を考える場合でも支点を共通にし並列につなぐと簡単な周期的な変化しか示さないが, 二つの振り子を直列につないだ二重振り子ではカオス的な変動を示すようになる. その他, 脳波や株価の時系列データでも非線形性を入れた説明が試みられている. 株価などの経済の動きを説明するのに物理学の知識を用いた経済物理学という分野も生まれており, 非線形項を含めた数学モデルにより現象を理解しようとする動きは益々活発になっていくであろう.

3. 非線形確率微分方程式

カオスのように非線形項があるだけでランダムな変動をする場合もある. 非線形項を含み, かつノイズ項もあるような場合を考える. 例として次の非線形確率微分方程式をあげる.

$$dx_t = (\gamma x_t - x_t^p)\,dt + x_t \circ dB_t$$

ただし B_t は次の平均, 分散を持つウイナー過程である. また, ノイズ項の解釈は伊藤によるものではなくストラトノビッチによるものを用いている.

$$\langle dB_t \rangle = 0\,, \qquad \langle dB_t dB_t \rangle = \sigma^2 dt$$

$p=2$ の場合を考えてみる. ロジスティック方程式で a が平均 γ で分散が σ^2 の白色ガウス雑音に従って変動していると考えると, 上記の確率微分方程式を導くことができる. つまり, 個体数の増加率が揺らいでいると考えるわけである. γ を 0 に近づけると x のモーメントの時間変化が指数関数的ではなく時間の逆べきになることが導かれている. このようなロングタイムテールを示すという結果を導くためには非線形確率微分方程式をオイラー差分により離散化するだけでも大丈夫であるが, より精密な議論をするためには離散化をより厳密に行う必要がある. 厳密に離散化された方程式を用いることにより為替レートなどの経済時系列データの予測がより良くできることが分かっている. (上記のものとは異なる非線形確率微分方程式を用いる必要がある.)

線形定常な時系列モデルの拡張として線形非定常時系列モデル, 非線形定常時系列モデルが考えられる. 非線形モデルは係数が状態に依存している非定常モデルとみなすこともでき, 今後研究が進んで行く分野であると思われる. 閾値 AR モデルはみかたを変えればテントマップによるカオスモデルと考えることもできるが, 時系列データで非線形性を考える場合は統計科学的なモデリングによることを勧めたい. カオスモデルと言えば耳触りが非常に良いが, カオスになるようなモデルはパラメータの推定が非常に難しく, データからモデルを推定するのに向いていない. 実際にカオスによる予測をうたっているグループが用いているのもカオスにも

なりうる非線形時系列モデルにすぎない．ランダムな変動は非線形項に起因するのではなく，システムノイズや観測ノイズに起因している場合の方が多いのである．

4. まとめ

我々の周りには非線形項を含んだ数学 (物理) モデルで記述できるような現象が満ちあふれていることを説明してきた．非常に変数の数が多い場合，線形モデルでも十分に難しくかつ複雑な現象を記述することは可能である．しかしながら，非線形性を入れるだけで，数学的表現としては簡単であるにもかかわらず，「複雑な」現象を説明できることが多い．これからしばらくは，「非線形性」と「複雑性」が科学のキーワードであり続けると考える．

この小文を読まれ，非線形性や複雑系に興味を持たれた方には，戸田 (1991)，北原・吉川 (1994)，井上 (1996)，金子・津田 (1996) を一読されることを勧めたい．また，非線形時系列モデルについては庄司・尾崎 (1996) を非線形性に基づくパターン形成については Chua (1998) を参考にされると良いと思う．

参考文献

Chua, L. O. (1998). *CNN ; A Paradigm for Complexity*, World Scientific, Singapore and New Jersey.
井上政義 (1996).『やさしくわかるカオスと複雑系のカオス』，日本実業出版社，東京.
金子邦彦，津田一郎 (1996).『複雑系のカオス的シナリオ』，朝倉書店，東京.
北原一夫，吉川研一 (1994).『非平衡系の科学 I』，講談社，東京.
庄司 功，尾崎 統 (1996). 局所線形化法による確率微分方程式のパラメータ推定，統計数理，**44**(2)，211-226.
戸田盛和 (1991).『カオス ── 混沌のなかの法則』，岩波書店，東京.