

# 負債要件を考慮した無限期間年金 ALM

山下 智志<sup>1</sup>・矢頭 智夫<sup>2</sup>

( 受付 2002 年 4 月 2 日 ; 改訂 2002 年 10 月 15 日 )

## 要 旨

年金 ALM を多期間ポートフォリオ問題として取り扱うアプローチは、近年詳細に研究されている。その多くは通常のポートフォリオ最適化と同様に、収益率の平均値と分散で効用を評価している。しかし、年金数理計算の要件を考慮すれば、インフレ率など資産側にも負債側にも影響のある変数があり、その相殺作用を考慮することが重要である。本研究ではこの点について、掛金率の増減に着目したリスク評価を採用したモデルを作成し、実用性を検討する。また、これまでの動的計画法を利用したモデルでは有限期間を前提としているため、実際の運用政策決定に利用するには限界がある。そこで、本研究は永続的な資金の例として年金基金の ALM を取り上げ、その多期間最適ポートフォリオ政策の作成モデルを提案する。その過程において、従来の方法である動的計画法やシナリオアプローチの持つ問題点を指摘し、それぞれの長所短所を比較する。その後、上記の問題をマルコフ計画問題として定式化し、それを解いて結果について検討を加える。

キーワード：年金 ALM，多期間最適化，マルコフ計画問題，掛け金率，資産配分。

## 1. はじめに

ファイナンス理論の出発点となったマルコビッツ理論では、対象とする投資期間は 1 期間であり、さらに負債の要件は全く意識されずに資産側にのみ注目していた。以降、マルコビッツ理論を基礎として、実際の資金運用への応用が研究されている。そのひとつが資産だけではなく負債要件を考慮した ALM ( Asset and Liability Management ) であり、今ひとつが多期間問題への拡張の試みであった。特に、近年実務での課題となっている年金の ALM 問題では、負債要件は必須であり、年金は原則永久資金であるから多期間の問題として捉える必要がある。そのため、純粋なマルコビッツモデルでは対応できず、その後発達した ALM 手法や多期間モデルを取り入れなければならない。しかしながら、年金の負債側要件は年金数理計算と呼ばれる非常に複雑な計算プロセスであり、これが原因で多期間問題としての取り組みも短期間に限られることが多く、年金 ALM への対応は必ずしも十分だったとは言えない。

このような現状を考慮し、我々は年金 ALM の多期間モデルの作成を目指した。負債要件が複雑なので多期間モデルが作成できない問題点については、山下・矢頭 (1998) において、シミュレーションによる年金数理計算の簡略化をおこない解決した。本研究では、その研究結果をもとに、最終的な目的である多期間を考慮した年金 ALM モデルを示す。特に年金資産では運用

<sup>1</sup> 統計数理研究所：〒106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7

<sup>2</sup> 野村総合研究所：〒100-0004 東京都千代田区大手町 2-2-1 新大手町ビル

期間が長く、終了時点が曖昧であることを考慮し、計画終了時点を特に定めない無限期間資産配分モデルを構築する。

以下、まず第 2 章では多期間最適化の概念を定義し、年金 ALM モデルを分類すると共に、外部における研究内容を総括する。続く第 3 章では、モデルの基となる最適化手法について投資ホライズンに注目する等、その適否を判断し、後に考慮する要素を年金 ALM の見地から整理を行う。これらを受けて、第 4 章でモデル化に向けた前提を決定し、計算の目的を整理した後、3 つのケースについて資産配分戦略を具体的に計算する。

## 2. 年金 ALM モデルの多期間最適化と過去の研究

年金 ALM などの資産負債のリスク管理に使用可能と思われるモデルには、バランスシート型資産負債管理のほかにシミュレーション型、最適化法型があり、最適化法型についてはシナリオ法とパラメータ法に分類される。さらに、パラメータ型は最適化条件の違いによって動的計画法やマルコフ計画法などに分類される。

### (1) バランスシート型

年金の資産・負債双方の金利に対する感応度(デュレーション)を測定し、両者を一致させて金利への感応度を 0 にする運用をするか、感応度を 0 にしなくとも余剰(資産 - 負債)の変動を減少させる資産比率を決定する方法。金融機関において伝統的に行われている。

### (2) シミュレーション型

資産比率を操作変数とした複数の戦略を用意する。それに対して時系列モデルによって各資産のリターン系列を何パターンも発生させ、これと負債側の推移を比較することによって、各戦略の評価を行う(モンテカルロ・シミュレーション)。ただし、年金 ALM で扱う「多くの資産」「長い期間」で想定されるリターン分布を忠実に表現できるようにするには、膨大なシナリオ数が必要となり、計算処理能力を超えるという問題がある。この方法では通常最適化計算による評価は行わない。一方、シミュレーション結果を基に変動の統計量を求め、改めて多期間モデルを構築する方法が提案されている(枇々木 2001)。これによると、シミュレーション型の ALM モデルを以下にあげる最適化モデルのハイブリットモデルということができる。これを年金 ALM に応用した例として、多田羅・枇々木(2001)がある。

### (3) 最適化型

最適化型は、数理計画法を利用し資産比率を最適化計算によって求める方法である。対象とする期間は 1 期間でも多期間でも想定できる。年金 ALM では効用関数が複雑であれば解を求めることができないため、いかに複雑な事象(リターン系列・掛金率計算等)を不都合が生じない程度に簡便化するかが焦点となる。ここでは「シナリオ法」と「パラメータ法」の 2 種類に分類した。

#### (3a) シナリオ法

リターン系列のシナリオツリーを一定のルールの下で作成し、この与えられたリターン系列(群)を直接目的関数の構成要素として定式化し、最適化計算を行う。一般的な精度を得るためにはシナリオ数が多くなり、多期間最適化計算を行うときに大規模計算となる。

利点としてはシナリオ法ではリターン系列を発生させる時系列モデルを複雑化できることや計算結果が理解しやすいことがあげられる。このような特長を生かしてポートフォリオの動的戦略に適用した例として、Mulvey and Vladimirov(1989)がある。

竹原(1994)は、まず 1 期間下方リスクモデル(LPM)の資産比率決定問題への適用が、過去の収益率データを将来の予測値として用いる限り、通常平均分散モデルと比較して必ずしも優

位な結果を与えないことを示し、その上で多期間モデルへの拡張について検討を行った。多期間モデルへの拡張はリスクの加法性を仮定した定式化により実現し、長期の負の系列相関・短期的な予測可能性といった条件を表現するためと、ダウンスイドリスク最小化モデルに適用できる離散分布を与えるために、シナリオ法を採用した。

なお、シナリオツリーをシミュレーション的に発生させるモデルとして、前述の枇々木(2001)がある。そこでは資産比率の最適化解を得るために目標計画法を用いている。

### (3b) パラメータ法

パラメータ法の多期間モデルは60年代後半に効用理論が確立されると共に、その具体的な解を求める方法として発達した。Merton(1969, 1971)やSamuelson(1969)などで紹介された、数理計画法を用いた最適化問題に帰着させる方法である。リターン確率分布を想定し、最適化計算では確率分布のパラメータ(平均分散・遷移確率等のリターンそのものではない統計量)を使用する。多期間最適化問題を解く手法としては、確率計画法、最大値原理・動的計画法やマルコフ計画法などがある。ただし、最大値原理を応用する方法はシナリオ法に分類し、動的計画法・マルコフ計画法はパラメータ型に分類するのが適当であろう。その他にも前述の目標計画法を用いた例がある。

パラメータ型は歴史の長さ按比例してそのモデルも多様であり、Merton(1969)とポラティリティの変動モデルを解析的に組み合わせる方法が主流である。これらの方法については本多(1999, 2002)にまとめられている。これらを用いられている数理計画法の種類で分類し、その中でALMに有効に利用できると思われる2つの方法を解説する。

#### (3b-①) 動的計画法

ベルマンの最適性の原理「最初の状態や決定がどうであっても、残りの決定が最初の決定によって生じた状態に関して最適政策となるように構成しなければならない」という性質を前提とし、 $n$ 変数(または $n$ 期間)の最適化問題を、1変数(または1期間)の最適化問題を $n$ 回解くことによって求める手法である。期間の最終時点から逆方向に解いていく「後向き帰納法」という解法が代表的であるため、通常は有限期間問題に適用される。但し、期間効用関数や状態遷移式が時間に依存しないのであれば(定常性の仮定)、無限期間についても適用可能である。日本の例では金崎(1994)が動的計画法を用いて資産配分決定問題を検討している。

#### (3b-②) マルコフ計画法

状態遷移確率が、現在の状態とそのときの政策決定のみに依存する(マルコフ性を有する)場合において、総期待利得を最大化するような政策(状態に対する決定の集合)を選択する方法である。Lucas(1978)によって理論的な枠組みが提唱された。総期待利得の定義により、割引率 $\beta$ による現在価値を最大化する $\beta$ 最適政策と、平均利得を最大化する平均最適政策がある。期間は有限期間でも無限期間でも考慮できるが、マルコフ計画法の特性が活かせるのは無限期間においてである(小河原・坂本(1987))。一般的なマルコフ計画法では利得のみに注目するため、リスクの概念は一般的には含まれない。しかし、いくつかの研究ではリスク回避的な問題設定に対して利用する試みがなされている。例えばKawai(1987)は、パラメトリックな分散最小化のアルゴリズムを示すと共に、optimal randomized policy という、2つの適当な政策を一定割合でランダムに採るという概念を導入し、より目的にあった政策を選択できることを示した。更にChung(1994)は、unichainの場合について、Kawaiと別の方法によるアルゴリズムを示した。Sobel(1994)は、unichainの場合での線形計画の手法が一定の条件の下でmultichainの場合でも利用できることを示した。これらの研究に共通することは、長期間にわたるリスク・リターンを計算しているが、効用の評価に利得の割引をしていないことである。また、政策(最適化問題の操作変数)の定義を「保有-非保有」の2値的投資行動としており、資産比率決定問

表 1. 多期間モデルの長所短所 .

		長所	短所
シナリオ型		<ul style="list-style-type: none"> <li>● リターン系列の生成過程が理解しやすい</li> <li>● リターン系列に複雑なモデルを利用することができる</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 期間が長く資産数が多いと、安定した解を得るためには膨大な計算を必要とする</li> </ul>
パラメータ型	動的計画法	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 1 期間を複数回解く解法なので比較的容易に解を求めることができる</li> <li>● 無限期間に解法も存在する</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 複雑な事象を取り込むことが困難</li> <li>● ベルマンの最適性の原理が成り立つことが前提</li> </ul>
	マルコフ計画法	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 「状態に対する政策」という解が得られるので、「定常政策」が定義できれば無限期間に対応する政策評価が可能になる</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 複雑な事象を取り込むことが困難</li> <li>● 状態の変化がマルコフ性を持っていることが必要</li> </ul>

題という概念には至っていないため、実用には適していない。

各方法の長所短所を表 1 にまとめた。

### 3. 各方法の特徴と年金 ALM での利用

3 章では、年金 ALM にとって適当なモデル作成のために対象期間の整理と変数などの設定を行う。

#### 3.1 投資ホライズンごとに適当な最適化手法

資金によって、運用が終了するまでの運用期間や評価の最長期間(本稿では「投資ホライズン」と呼ぶ)は異なる。対象とする期間ごとに多期間モデルの利用の可否を次の 4 つのケースについて検討した(図 1, 表 2)。

##### (1) 最終時点が明確で比較的早期に終了するケース

このケースに該当する資金として、信託期間が短い投信や閉鎖適年が挙げられる。この場合、通常のパラメータ法で特に問題は生じない。また、リターン系列を展開させても一定の規模に納まるので、シナリオ法の適用が可能であり、複雑な事象をそのまま利用できる。

##### (2) 現状の影響が残る期間のみを対象とするケース

「現状」とは資産収益・資金の現在の評価を指す。過去データの自己相関を参考にすると、収益の現状の影響が残るのは数年程度であり、そのためシナリオ法の適用が可能である。また、このケースでは資金が継続しているにもかかわらず、投資ホライズンの終了時点で残余資産等の評価を行う。この残余評価が現実的問題と合致しているかどうかが問題である。

##### (3) 現状と無関係な期間のみを対象とするケース

現状と無関係な期間とは(2)で対象とする期間以降に続く期間を指し、現状と無関係に「一般的な恒常的行動を求める」ことになる。「定常的な永久期間」を対象とするのでパラメータ法で扱える。一方シナリオ法では、スタートとエンドの状態が無相関になる長い期間を対象にその期間の解を求め、それを無限期間に対する解と解釈する必要がある。

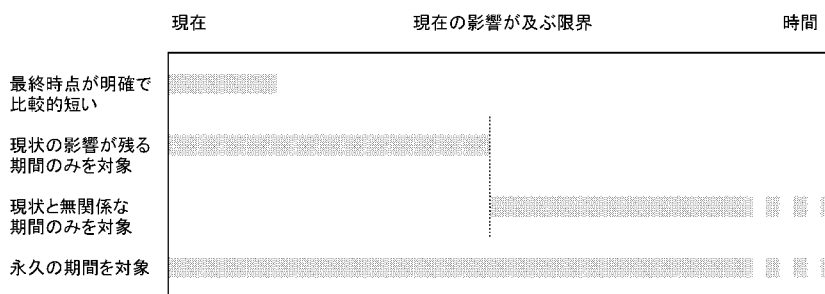


図 1. 投資ホライズンのイメージ.

表 2. 各投資ホライズンごとの手法の適性.

		最終時点が明確で比較的短い	現状の影響が残る期間が対象	現状と無関係な期間のみが対象	無限期間を対象
シナリオ型		◎	○～△	○～△	×
パラメータ型	動的計画法	○	○	○	△
	マルコフ計画法	○	○	◎	○

(4) 永久期間を対象とするケース

一般的な年金資金は永久的な継続を前提としているので、永久期間を考慮するのが適当である。しかし、計算処理が煩雑である点でシナリオ法では(3)よりさらに困難になる。また、現在から将来にわたって資金の条件の変化を想定することが困難な点で、パラメータ法では(2)より困難になる。特に動的計画法では、無限期間に対する手法が限定的であるため適用が難しい。

3.2 年金 ALM の特徴

本節では、多期間年金 ALM での利用という観点から、最適化計算において考慮あるいは設定すべき内容を述べる。最適化計算で必要とする要因は以下の4点である。

- (1) 効用関数
- (2) 投資ホライズン
- (3) 操作変数
- (4) 状態変数

(1) 多期間年金 ALM における効用関数

実際に最適化計算を行う場合、目的(効用)関数(特に結果効用)を定義する。本研究では結果効用を加入者の「掛金率」の(単調減少)関数と定義する。

掛金率以外に効用に関わりそうなものとしては、次の2つも考えられるが、これらの変数は掛金率に最終的には反映されるため、「掛金率」のみの効用関数でも問題はない<sup>注1</sup>。

- ① 運用リターン ... リターンが低いほど、掛金率が上がる。しかし、負債の要件が入っていない分、効用の対象として掛金率より劣る。
- ② 積立比率(資産総額/責任準備金) ... 積立比率が低いほど、掛金率が上がる。

さらに最適化計算のためには、将来の結果効用が不確定であるため、投資比率決定には期待効用を求める必要がある。本研究では結果効用(掛金率)の平均と分散に関する期待効用を仮定し、原則としてシャープ型効用関数

$$(3.1) \quad u = \mu - 1/\tau \cdot \sigma^2$$

を用いる。ただし、 $u$  は期待効用、 $\mu$  は将来掛金率分布の平均、 $\sigma^2$  はその分散、 $\tau$  はリスク許容係数である。

#### (2) 年金での投資ホライズン

年金 ALM の最適化計算で対象とする投資期間には、次の 2 つの側面があることを考慮する必要がある。

##### ① 5 年単位で評価される。

運用成果は年度ごとに公表されるが、加入者の効用に直接関わる「掛金率の変化」は、財政再計算が行われる 5 年ごとに影響を受ける。そのためモデルでも 5 年ごとに効用を評価するのが適当である。

##### ② 永久的な資金である。

閉鎖適年のような一部の資金を除き、企業のゴーイング・コンサーンの概念に基づき、年金資金は永続することが原則である。したがって、効用の総合評価は永久期間にわたってすべきである。

以上の理由から、5 年ごとの期間に区切った上で、永久期間を運用の評価対象とするのが適当と考えられる。

#### (3) 操作変数

年金 ALM において操作変数は「資産組入比率」であるとする。本研究では株式・債券・現金のインデックスを保有すると仮定する。

#### (4) 状態変数

状態変数とは、過去の状態変数・操作変数及び外生変数により、現在の値が決まる変数を言う。各資産のリターン(インフレ率を含む)系列は、過去のリターン系列と外生変数(攪乱項)によって決まる状態変数である。

山下・矢頭(1998)により、適格年金の掛金率に影響を及ぼす要因で事前に不確定なものは、リターンとベア(インフレ)であることを確認している。厚生年金基金については確認が済んでいないが、リターンとベア以外の要因は異なる時点ごとの独立性が強いので外生変数として取り込むのみで十分であると考えられる。

### 4. 無限期間最適化問題と年金 ALM

#### 4.1 年金 ALM を対象とした多期間最適化モデル

本章では、これまでの検討から導かれる年金 ALM 多期間最適化モデルを構築する。

##### (1) 最適化モデルの前提条件

本章で作成する最適化モデルの前提を、次のように定める。

投資ホライズン ... 現状と無関係な期間のみを対象とするケース(3.1の期間の分類では(3)の分類に属する)

モデルの定式化 ... マルコフ計画モデル

時間の単位 ... 状態遷移につき 5 年を 1 単位とする離散時間  
 効用の対象 ... 掛金率(の分布)  
 資産比率変更頻度 ... 5 年ごと  
 政策 ... 債券利回りまたはインフレ率に対応した資産比率  
 政策の選択基準 ... 平均・分散のパレート最適な組合せによる政策を選択

なお、年金 ALM からの観点による資産比率決定は、負債状態の変化(成熟度や積立率など)に対応する面と、資産運用環境の変化に対応する面がある。ここでは成熟度については定常状態(すでに成熟)に入っており、資産運用環境への対応は限定して行くと想定している。

### (2) マルコフ計画法を利用したモデル化

ここでまずマルコフ計画法によって導出される政策の意味を示す。まず、基本的な「平均最適政策」を求める場合、与えられた利得・遷移確率に対して、最適政策  $f$  とその時の平均利得  $u$  は次の式により与えられる。

$$(4.1) \quad u + v(i) = \max_{f(i)} \{r(i, f(i)) + \beta \sum_{i'=0}^N p(i'|i, f(i))v(i')\} \quad (i, i' = 0, 1, \dots, N)$$

$S = \{0, 1, \dots, i, i', \dots, N\}$  : 状態集合

$F = \{0, 1, \dots, f, \dots, N\}$  : 政策集合

$f(i)$  : 政策  $f$  における状態  $i$  での行動

$p(i'|i, f)(i, i' \in S, f \in F)$  : 状態遷移確率(状態  $i$  において政策  $f$  を取ったときに状態  $i'$  に遷移する確率)

$r(i, f(i))$  : 状態  $i$ , 政策  $f$  のときの利得

$v(i)$  : 初期状態  $i$  のときの総期待利得

このように平均利得  $u$  を最大にする政策  $f$  を求める。この構造は  $v(i) \rightarrow v(i')$  の漸化式により無限期間まで想定されている。ただし、この定式化の場合利得のみに注目し、リスクについては無視している。ファイナンスに応用するためには、これに先述の Kawai(1987)によるリスク回避的な概念を導入する必要がある。

ある政策に対して平均・分散アプローチを導入する場合、平均は式(4.1)による定式化により  $u$  として求める。さらに、式(4.1)の利得の代わりに  $v^2(i)$  を代入して平均  $w$  を求め、その後次式により分散を求める。

$$(4.2) \quad \text{Var}(r) = E(r^2) - (E(r))^2 = w - u^2$$

この結果、長期間一定の政策を採った場合のリスク・リターンを求めることができる。ただし、年金運用の場合、資産規模が市場規模に比較して十分小さい場合、状態を市場の変動と仮定すれば、状態遷移確率は政策に依存しない。そのため、年金運用で取り上げるべき分析は正確にはマルコフ計画法ではなく、マルコフ性を利用したモデルの無限期間最適化問題となる。

### (3) 年金のマルコフ計画モデルの前提

本研究ではキャッシュアウト(年金給付)とキャッシュイン(掛金収入+キャピタルゲイン)がほぼ均衡する状態が継続する状況を想定している。これは年金数理の概念上では「定常状態」と言われているものである<sup>注2</sup>。

また、このモデルでは 5 年ごとに資産比率の変更時期がくるが、これは必ずしも現実的ではない。(ただし、最適化計算の方法を改良することにより現実的な変更頻度の計算が可能となる。5.1 節参照のこと。)また、割引率  $\beta$  は 1 とする。これは平均利得最大化法と呼ばれ、割引

表 3. 設定したケースとそれぞれの計算プロセス .

	(ケース 1)	(ケース 2)	(ケース 3)
効用の対象	リターンの分布	掛金率の分布	掛金率の分布
状態の定義	債券金利	インフレ水準	債券金利とインフレ水準
算出プロセス	①時系列データより5年ごとの金利の状態遷移確率を求める ②リターンモデルから、各資産比率・各状態ごとの5年平均リターンの平均・リスクを求める ③状態の定常確率を計算し、政策を与える(状態に対する行動) ④すべての政策に対して、リターンの無限期間の平均・リスクを計算する ⑤最適政策を選択する	①時系列データより5年ごとのインフレの状態遷移確率を求める ②リターンモデルから、各資産比率・各状態ごとの5年平均リターンの平均・リスクを求める ③リターンモデルから、各状態ごとの5年間インフレの平均・リスクを求める ④状態の定常確率を計算し、政策を与える(状態に対する行動) ⑤すべての政策に対して、掛金率の無限期間の平均・リスクを計算する ⑥最適政策を選択する	①リターンモデルから、5年ごとの金利及びインフレの状態遷移確率を求める ②リターンモデルから、各資産比率・各状態ごとの5年平均リターンの平均・リスクを求める ③リターンモデルから、各状態ごとの5年間インフレの平均・リスクを求める ④状態の定常確率を計算し、政策を与える(状態に対する行動) ⑤すべての政策に対して、掛金率の無限期間の平均・リスクを計算する ⑥最適政策を選択する

率を特定できないケースで用いられる .

#### (4) 解を求めるための導出フローと想定したケース

本節(1)で具体化させたモデルを、段階的に複雑にしていく .

ケース 1 では、効用の対象を掛金率ではなくリターンの分布とした場合を扱う . これは通常の負債側を考慮しない資産選択問題である . また、状態の定義を債券利回りとし、債券利回り水準に従って資産比率を変更する政策をとる .

ケース 2 では、効用の対象を年金の掛金率の分布とし、年金 ALM の概念に沿った問題としている . 状態の定義をインフレ率とし、インフレ水準に基づいて資産比率を変更し、資産と負債の両面を考慮した政策を選択する .

ケース 3 では、効用の対象を掛金率の分布とし、状態の定義を債券利回りとインフレ率の 2 変数の組合せで定義する . この 2 変数に基づいて資産比率を変更する場合というように、場合分けして考える .

それぞれのケースの計算手順を表 3 にまとめた .

#### 4.2 効用の対象をリターンの分布とする場合(ケース 1)

ケース 1 では、年金 ALM を想定しているケース 2, 3 へ続くテストケースとして、実際に総当たり法によって最適解を導出し、種々の問題点の検討を行う . ここで導出する解は、無限期間で一定の政策を取り続けたときの単位期間 5 年ごとの平均分散が、パレート最適 (ここでは「分散を上げずには、平均リターンを上げることができないこと」を指す) である政策群となっている .

前提の整理をすると下記のようになる . これらはケース 2, 3 においてもほぼ共通である .

状態変数 ... 債券利回り

操作変数 ... 資産比率(株式・債券・コールの組入資産比率) . 操作変数は債券利回りの関数 .

すなわち、「債券利回りに応じて決定される資産比率の組合せ」が「政策」となる .

状態遷移確率 ... 債券利回りの 5 年ごとの状態遷移を示す . (操作変数とは無関係)

利得( $r_i^d, R_i^d$ ) ... 状態ごとの資産比率全体のリターンとリターンの 2 乗値



① リターンモデルから債券利回りの5年ごとの状態遷移確率を求める

ケース1では債券利回りの水準により、各政策に資産比率を定める。そのため債券利回りの5年ごとの遷移確率が、状態遷移確率として必要となる。この状態遷移確率を求める際のリターン系列の作成には、山下・矢頭(1998)で作成した次のリターンモデルを用いた(式4.3~4.5)。まず、コール金利とインフレ率については、下記のBox-Cox変数を施す。(変換前の値を $x_i$ 、変換後の値を $y_i$ とし、 $y_i$ は正規分布に従うとする。)

$$(4.3) \quad \text{コール金利} \dots y_3 = \frac{(x_3 - 1.5)^{0.3} - 1}{0.3} \equiv h_3(x_3)$$

$$(4.4) \quad \text{インフレ率} \dots y_4 = \frac{(x_4 + 3.0)^{0.3} - 1}{-0.3} \equiv h_4(x_4)$$

これらの変数に対して、多変量ARモデルを適用して、リターンモデルを作成する。

$x_{1t}$ : 株式月次リターン,  $x_{2t}$ : 債券利回り,  
 $y_{3t}$ : 変換後コール金利,  $y_{4t}$ : 変換後インフレ率

各々の平均値は、 $\bar{x}_1 = 0.954$ ,  $\bar{x}_2 = 6.897$ ,  $\bar{y}_1 = 1.906$ ,  $\bar{y}_2 = 1.386$ であり、ARのパラメータは

$$\begin{bmatrix} x_{1t} - \bar{x}_1 \\ x_{2t} - \bar{x}_2 \\ y_{1t} - \bar{y}_1 \\ y_{2t} - \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1.926 \\ .009 & 1.248 & 0 & .870 \\ .001 & .138 & 1.145 & .070 \\ 0 & .033 & .076 & .930 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-1} - \bar{x}_1 \\ x_{2t-1} - \bar{x}_2 \\ y_{1t-1} - \bar{y}_1 \\ y_{2t-1} - \bar{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ .009 & -.296 & 0 & -.614 \\ .001 & -.111 & -.227 & -.049 \\ 0 & -.026 & -.076 & .930 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-2} - \bar{x}_1 \\ x_{2t-2} - \bar{x}_2 \\ y_{1t-2} - \bar{y}_1 \\ y_{2t-2} - \bar{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \varepsilon_{4t} \end{bmatrix}$$

である。このとき誤差項の分散共分散行列  $G$  は以下ようになった。

$$(4.5) \quad G = \begin{bmatrix} 24.045 & -.354 & -.028 & 0 \\ -.354 & .061 & .005 & 0 \\ .028 & .005 & .013 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .003 \end{bmatrix}$$

このモデルと乱数によって月次リターン系列を作成する(債券、コールは、金利からリターンを計算する)。5年×10000パターン作成した後、このうちの債券利回り(0.5%きざみ)の5年ごとの遷移確率を求める。 $r_t$ を $t$ 期における債券利回りとして、集合 $R_i$ を次のように定義する。

$$(4.6) \quad R_\lambda = \left\{ r_t \mid \frac{\lambda}{2} \leq r_t < \frac{\lambda+1}{2} \right\} \quad (\lambda = 1, \dots, 22)$$

このとき次式のように状態遷移確率は定義される。

$$(4.7) \quad p(i, i') = \Pr(r_t \in R_{i'} | r_{t-1} \in R_i)$$

② リターンモデルから、各状態ごとの 5 年年率リターンの平均・リスクを求める  
まず、各資産の月次リターン  $z_{1t}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を算出する。

$$(4.8) \quad \text{株式リターン} \dots z_{1t} = x_{1t}$$

$$(4.9) \quad \text{債券リターン} \dots z_{2t} = -4.4(x_{2t} - x_{2t-1}) + 0.08(x_{2t} - x_{2t-1})^2 \\ + 100\{(1 + x_{2t}/100)^{1/12} - 1\}$$

$$(4.10) \quad \text{コールリターン} \dots z_{3t} = 100\{(1 + h_3^{-1}(y_{3t})/100)^{1/12} - 1\}$$

上記の月次リターンから各資産の 5 年(60 ヶ月)平均リターン  $Z_{i\tau}$  を計算する。

$$(4.11) \quad Z_{i\tau} = 100 \cdot \left\{ \prod_{t=60(\tau-1)+1}^{60\tau} (1 + Z_{it}) - 1 \right\}^{1/5} \quad (i = 1, 2, 3)$$

⑤ で求める政策ごとの平均リターン・分散を計算する際に必要となる次の各数値を、① で用いたリターン系列によって求める。計算結果のうち 5 年の期待リターンを図 2 に示す。

③ 状態の定常確率を計算する

$$(4.12) \quad \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(1,1) & \dots & p(1,22) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(22,1) & \dots & p(22,22) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ただし, } \sum p_i = 1$$

これらを満たすベクトル

$$(4.13) \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{22} \end{bmatrix}$$

の要素を定常確率と呼ぶ。定常確率の計算結果については矢頭・山下(1995b)を参照されたい。  
この定常確率は、長期間において各状態がどの程度の頻度で生起するかを表すと解釈できる。

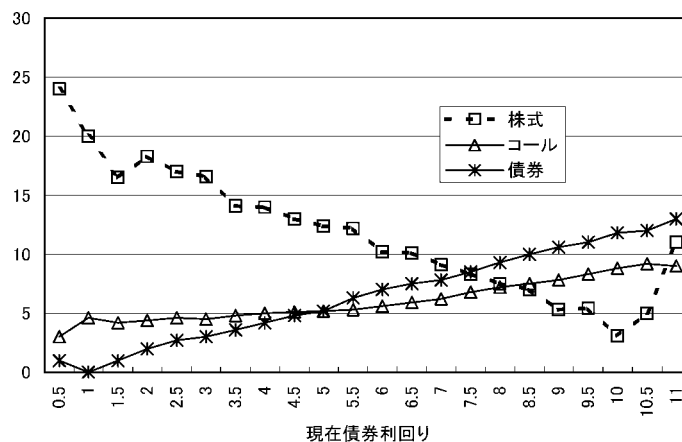


図 2. 債券金利水準ごとの 5 年期待リターン。

マルコフ計画法では、政策によって遷移確率が変化する場合も扱えるが、ここでは一定のものとする(第5章参照)。

#### ④ 政策を与える(状態に対する行動)

政策では、各状態ごとに資産比率を定義するため、状態が  $N$  種類、資産比率の組合せが  $S$  種類あるならば、政策は  $S^N$  通り存在しうる。計算量を考慮し次のように状態・政策を設定した。

(1) 22通りの状態を次の5通りにグループ化し、同じグループでは同じ資産比率をとるよう政策を定義する。

- ・ 超低金利グループ：債券利回り4%未満
- ・ 低金利グループ：債券利回り4%以上 5.5%未満
- ・ 中金利グループ：債券利回り5.5%以上 7%未満
- ・ 高金利グループ：債券利回り7%以上 8.5%未満
- ・ 超高金利グループ：債券利回り8.5%以上

(2) 株式比率は0~30%まで10%刻み(4通り)とし、コールは10%から30%まで10%刻み(3通り)とし、債券比率はそれらの残余とする。

こうして、248,832通りの政策を想定した。

#### ⑤ すべての政策に対して、リターンの無限期間の平均・リスクを計算する

$$(4.14) \quad \text{平均} \dots \mu_f = \sum_{i=1}^{22} p_i \sum_{j=1}^3 w_{f(i)}^j \mu_{ij}$$

$\mu_f$ ：政策  $f$  での期待リターン

$p_i$ ：状態  $i$  の生起確率

$w_{f(i)}^j$ ：政策  $f$  を採ったときの、状態  $i$  での資産  $j$  の組み込み比率

$\mu_{ij}$ ：状態  $i$  での資産  $j$  の期待リターン

$$(4.15) \quad \text{分散} \dots \sigma_f^2 = \sum_{i=1}^{22} p_i \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 w_{f(i)}^j w_{f(i)}^k s_{i,jk}^2 - \mu_f^2$$

$\sigma_f^2$ ：政策  $f$  での分散

$s_{i,jk}^2$ ：政策  $f$  を採ったときの、状態  $i$  での資産  $j$  の収益率の2乗の期待値 ( $j = k$ )。政策  $f$  を採ったときの、状態  $i$  での資産  $j$  と資産  $k$  の収益率の積の期待値 ( $j \neq k$ )

#### ⑥ 最適政策の選択

計算された各政策の平均・分散から、効率的フロンティア上の政策を選択する。その結果表4にある13個の政策が選択された。図3にそれぞれの政策を平均分散平面にプロットし、効率的フロンティアの位置を示す。

表4では、例えば政策Aは、債券利回りが4%未満のときには株式比率を20%にすることを示す。これらのうち、政策A, G, Mをそれぞれローリスク、ミドルリスク、ハイリスクの政策として、各金利水準での資産比率を図4に示した。

このように、各債券利回り水準で、各政策で示された資産比率に変更することで、長期的には5年リターン(年率)の平均と分散が最適となり、効率的フロンティア上の戦略を実現できる。

#### ケース1の結果と考察

政策Hの債券比率に代表されるように、債券利回りの水準と比率の増減の仕方が単調でないものがある(債券利回りが低いほうから、40 40 70 90 80%)。そのため、単純に「高

表 4. パレート最適な政策の平均・分散(ケース 1).

政策	分散	平均	株式比率				債券比率				コール比率				
			超低金利	低金利	中金利	高金利	超低金利	低金利	中金利	高金利	超低金利	低金利	中金利	高金利	
A	2.29	6.86	20	10		0	50	60		70			30		
B	2.37	7.03	20	10		0	50	60		70			30		
C	2.64	7.26	20	10		0	50			70		30	30		
D	2.69	7.29	20	10		0	50	80		70		30	10	30	
E	2.78	7.34	20	10		0	50		80	70		30	10	20	30
F	3.07	7.46	30	20	10	0	40	50	80	90	70		30	10	30
G	4.56	7.82	30	20	10	0	40	70	90	70		30	10	30	30
H	4.63	7.84	30	20		0	40	70	90	80		30	10	20	
I	4.72	7.85	30	20		0	40	60	90		30		10		
J	6.11	8.02		30		0	40	60	90		30		10		
K	6.21	8.04		30	10	0	40	60	80	90		30		10	
L	6.72	8.05		30	20	0	40	60	70	90		30		10	
M	7.62	8.06		30		0	40	60	90		30		10		

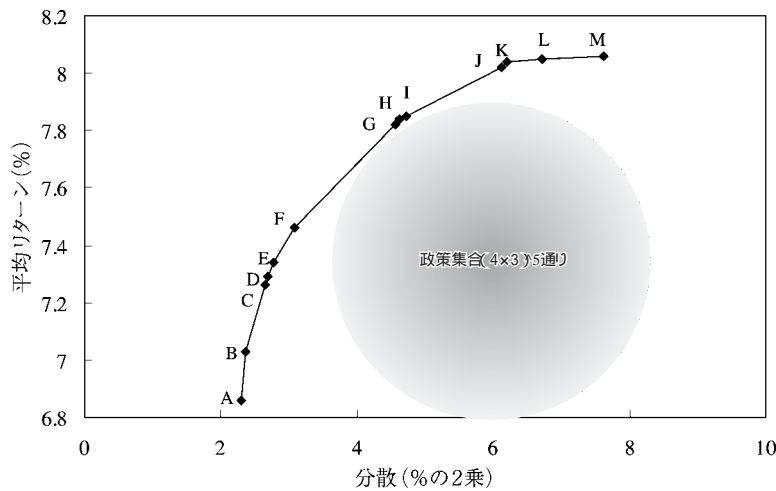


図 3. パレート最適な政策と効率的フロンティア(ケース 1).

金利のときは債券投資」といった判断が適切でない場合が存在する .

問題点あるいは今後改善の余地がある点としては ,

- ・ 離散的な政策しかとれず , また状態 (債券利回り水準) のグループ分けもラフであるため , 上記政策 H のように状態ごとの資産比率に大きな差異が生じている . ( もっとも , 5 年間という長い期間での資産比率だから , ある程度のラフさは許容されると思われる . )
- ・ 効率的フロンティア上の政策は , 前提としたリターンモデルに大きく依存する . ( 設定した時系列モデルでは高金利時に株式リターンが低くなるため , 高金利・超高金利時の株式比率が非常に低くなる . )
- ・ 時系列モデルから発生させたリターン系列の長さが十分ではないため , ① の遷移確率や ② の平均等の数値について , 状態ごとの大小関係が , データ数が無限に多くなったとき

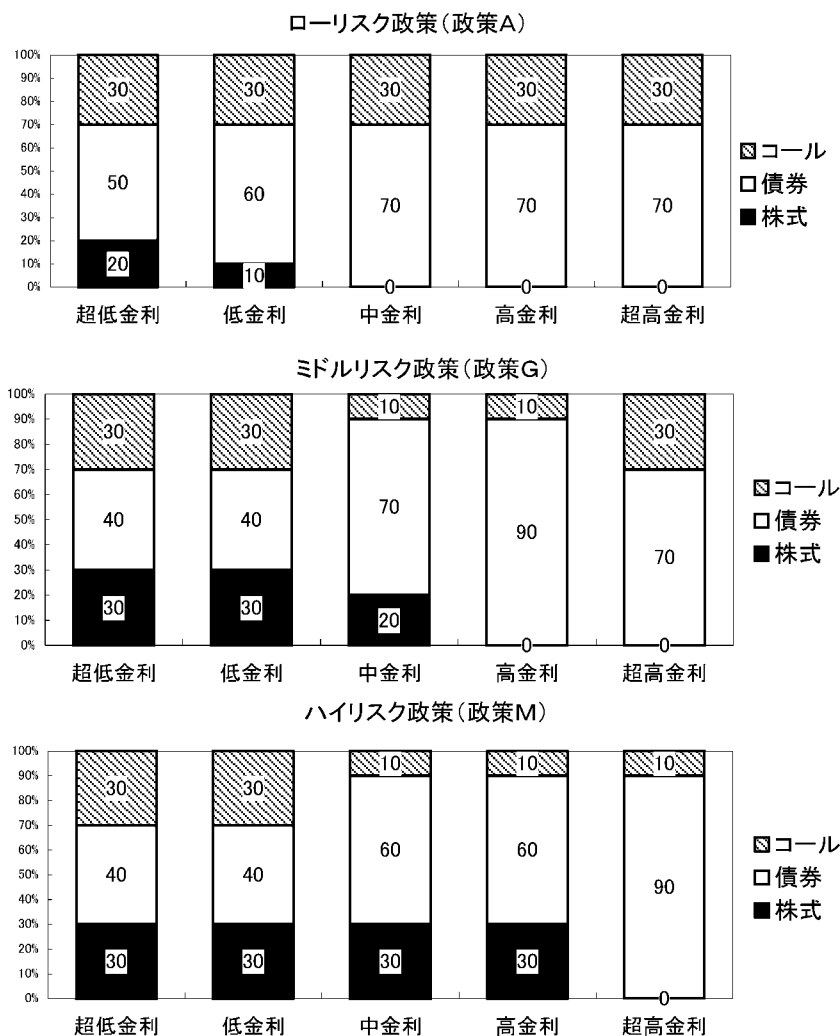


図 4. パレート最適な政策の資産配分比率例( ケース 1: 債券金利によるリターン戦略 ).

に収束すべき値の大小関係と異なっている。しかしながら、①の結果から導出された③の定常確率では、その影響は軽微になっている。

4.3 効用の対象を掛金率とし、インフレ水準に基づいて資産比率を変更する( ケース 2 )

本節では、掛金率水準に対する効用に注目し、最適政策を選択する。求める解は掛金率の平均・分散がパレート最適である政策群である。掛金率変化は、山下・矢頭(1998)の検討により、財政再計画の間隔である5年間の平均リターンと平均インフレ率の関数である。リターンには直接影響を与えなかったインフレ率が掛金率には大きく影響するため、インフレ水準を考慮した政策が必要となる。

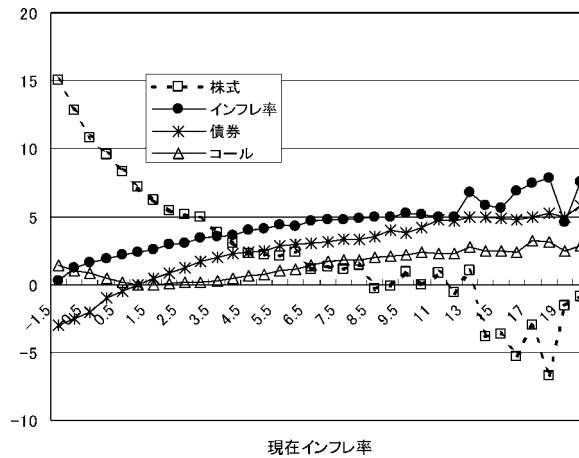


図 5. インフレ水準ごとの 5 年期待リターン .

ケース 1 と異なるのは次の点である .

- ・ リターンの平均・分散ではなく、掛金率の変化の平均・分散により評価する .
- ・ 資産比率はインフレ水準に応じて決定する .
- ・ 資産比率の刻みを変更する . (株式の刻みを 5% とする .)
- ・ ケース 1 では遷移確率を求める差異の刻みを債券利回りについて 0.5% 刻みとしていたが、インフレ率は上方に裾の長い分布となるので、10% 以下では 0.5% 刻み、それを超えた水準では 1% 刻みとする .

① リターンモデルからインフレ率の 5 年ごとの状態遷移確率を求める

ケース 1 と同じリターンモデルから、インフレ率の 5 年間遷移確率を求める .  $Ir_t$  は  $t$  期におけるインフレ率 . 状態を離散的に定義する必要があるため、10% 以下は 0.5% 刻み、10% ~ 20% は 1% 刻みとし、それ以上は一つにまとめた .

$$(4.16) \quad \begin{aligned} IR_\lambda &= \left\{ Ir_t \mid \frac{\lambda-4}{2} \leq Ir_t < \frac{\lambda-3}{2}, 1 \leq \lambda \leq 23 \right\} \\ IR_\lambda &= \{ Ir_t \mid \lambda - 14 \leq Ir_t < \lambda - 13, 24 \leq \lambda \leq 33 \} \\ IR_{34} &= \{ Ir_t \mid 20 \leq Ir_t \} \end{aligned}$$

これにより次式のように遷移確率は表される(時間の単位は 5 年) .

$$(4.17) \quad p(i, i') = \Pr(Ir_t \in IR_{i'}, | Ir_{t-1} \in IR_i)$$

この定義のもとで求めた状態遷移確率については、矢頭・山下(1995b)の図表 4.9 を参照 .

② リターンモデルから、各資産及びインフレ率の各状態ごとの 5 年年率リターンの平均・リスクを求める

図 5 に各資産及びインフレ率の 5 年期待値の計算結果を示した . 各資産及びインフレ率の 2 乗値の平均、各資産・インフレ率相互間の積の平均に関する計算結果については矢頭・山下(1995b)を参照 .

③ 状態の定常確率を求める

① の状態遷移確率から、インフレ率の定常確率を計算する(4.2③と同じ) .

## ④ 政策を与える

(1) 状態を次の5種類にグループ化し、そのグループ内ではある政策に対して同じ資産比率をとることにする。

- ・ 超低インフレグループ：インフレ率 0.5% 未満
- ・ 低インフレグループ：インフレ率 0.5% 以上 2.5% 未満
- ・ 中インフレグループ：インフレ率 2.5% 以上 5.0% 未満
- ・ 高インフレグループ：インフレ率 5.0% 以上 10.0% 未満
- ・ 超高インフレグループ：インフレ率 10.0% 以上

(2) 資産比率の刻み幅

株式比率 ... 0 ~ 30% まで, 5% 刻み(7 通り)

コール比率 ... 10 ~ 30% まで, 10% 刻み(3 通り)

債券比率 ... 残余

## ⑤ すべての政策に対して、掛金率の無限期間の平均・リスクを計算する

山下・矢頭(1998)の結果をもとに、適格年金におけるリターン・インフレと掛金率変化との簡略化した関係式に基づき、掛金率が変化するものと想定する。この関係式を次のように表現する。

$$(4.18) \quad R = a(r - 5.5) + b\omega$$

$R$  : 掛け金率変化(パーセントポイント)

$r$  : 5年平均リターン

$\omega$  : 5年平均インフレ率

$a = -2.51$ ,  $b = 1.77$ (矢頭・山下(1998)の式(16)より)

リターンは、各資産のリターンの加重平均で表されるから、

$$(4.19) \quad R = a \sum_{j=1}^3 w_j(r_j - 5.5) + b\omega$$

$w_j$  : 資産  $j$  の組み入れ比率

$r_j$  : 資産  $j$  のリターン

更に、 $r'_j = r_j - 5.5$  ( $j = 1, 2, 3$ ) とおいて

$$(4.20) \quad R = a \sum_{j=1}^3 w_j r'_j + b\omega.$$

掛け金率の期待値

$$(4.21) \quad \mu_f = \sum_{i=1}^s p_i \left( a \sum_{j=1}^3 w_{f(i)}^j \mu_{ij} + b\mu_{i,\omega} \right)$$

$\mu_f$  : 政策  $f$  での期待掛け金率

$p_i$  : 状態  $i$  の生起確率

$w_{f(i)}^j$  : 政策  $f$  を採ったときの、状態  $i$  での資産  $j$  の組み込み比率

$\mu_{ij}$  : 状態  $i$  での  $r'_j$  の期待値

$\mu_{i,\omega}$  : 状態  $i$  での期待インフレ率

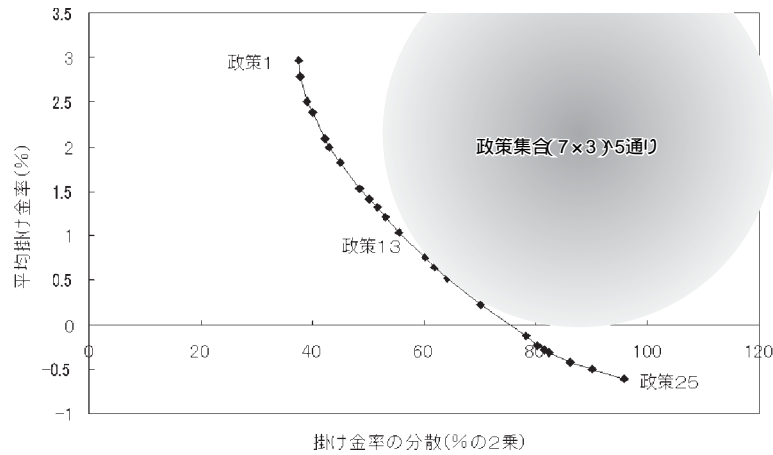


図 6. パレート最適な政策と効率的フロンティア(ケース 2).

#### 掛け金率の分散

$$(4.22) \quad \sigma_f^2 = \sum_{i=1}^s p_i \left( a^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 w_{f(i)}^j w_{f(i)}^k s_{i,jk} + 2ab \sum_{j=1}^3 w_{f(i)}^j s_{i,j\omega} + b^2 s_{i,\omega}^2 \right) - \mu_f^2$$

$\sigma_f^2$ : 政策  $f$  での分散

$s_{i,jk}$ : 状態  $i$  での  $r'_j$  の 2 乗の期待値 ( $j = k$ ). 状態  $i$  での  $r'_j$  と  $r'_k$  の積の期待値 ( $j \neq k$ )

$s_{i,j\omega}$ : 状態  $i$  での  $r'_j$  とインフレ率の積の期待値

$s_{i,\omega}^2$ : 状態  $i$  でのインフレ率の 2 乗値の期待値

#### ⑥ 最適政策を選択する

計算された各政策の平均・分散から，効率的フロンティア上の政策を選択する．平均・分散の対象が掛金率なので平均は低い程よい．したがって，図 6 ではパレート最適な政策群は左下方に凸な形状となっている．パレート最適な政策のうち，最もローリスクのものとハイリスクのもの，及び序列の上で中間にあるミドルリスクのものについて，各状態(インフレ水準)での資産比率を図 7 に示した．

#### 4.4 効用の対象を掛金率の分布とし，2 変数に基づいて資産比率を変更する場合(ケース 3)

ケース 2 でインフレ水準に基づいて資産比率を決定していたが，このケースではインフレ水準と債券利回りの 2 つの規準をもとに資産比率を決定する．債券利回りを利用したのは，資産比率での債券比率は高いため，債券利回りは資金全体のリターンへ与える影響が大きいからである．さらに，債券利回りとインフレ率は連動する(高インフレ時は高金利，低インフレ時は低金利)が，式(4.5)からも見られるようにインフレ水準によって債券利回りの挙動は一定の影響を受けるので，2 変数を組み合わせることによってケース 2 以上に有効な最適解を得られることが期待される．

その結果，ケース 2 と異なるのは次の点である．

- ・ 債券利回り及びインフレ水準の組合せにより状態を定義し，状態に応じて最適資産比率



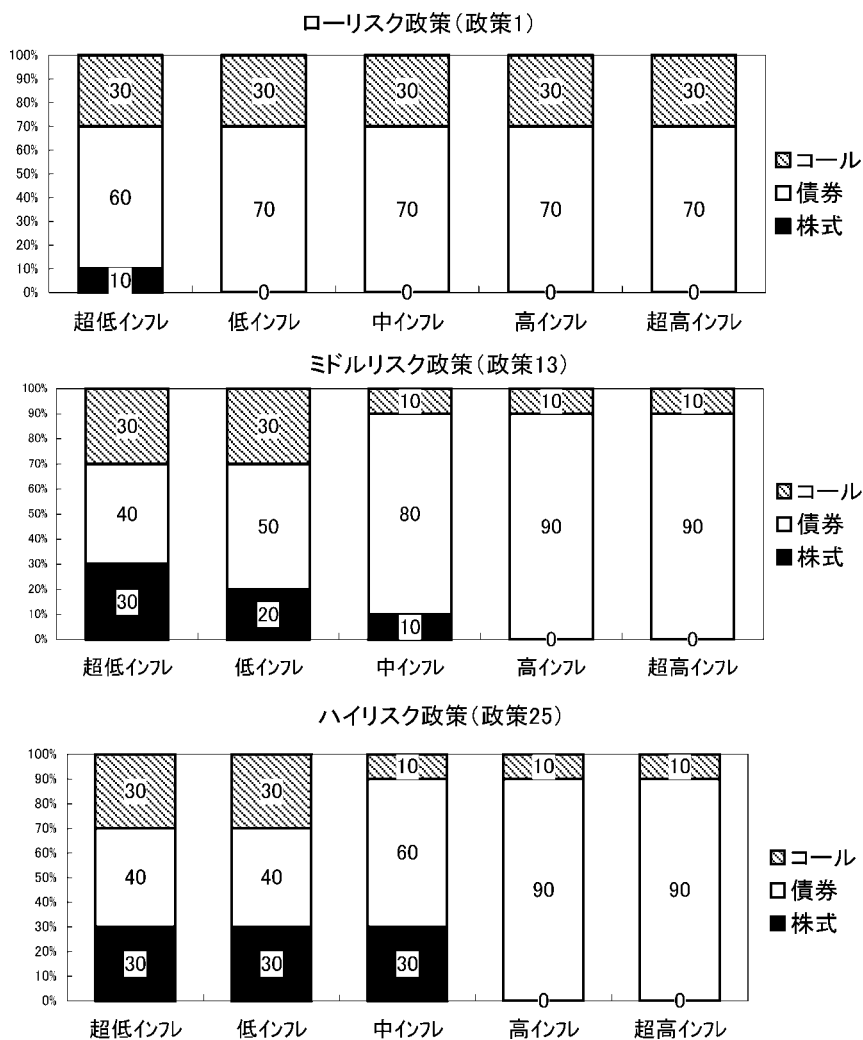


図 7. パレートに最適な政策の資産配分比率(ケース 2: インフレ率による掛金率低下戦略).

を決定する.

- ・ 遷移確率を求める際の刻みを,最終的に政策を定めるときのグループ分けと同じとした.

① リターンモデルから金利及びインフレ率の 5 年ごとの状態遷移確率を求める

ケース 1 と同じリターンモデルから,インフレ率の 5 年間遷移確率を求める. 状態を,債券利回りの水準及びインフレ率の債券利回りの差により分類する.  $r_t, Ir_t$  はそれぞれ  $t$  期における債券利回りとインフレ率(例えば状態  $R_2$  は,低金利で且つ,インフレ水準が債券との比較

で)高い水準にある場合)。

$$(4.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = \{r_t, Ir_t \mid r_t < 5.5, Ir_t < r_t - 4\} \\ R_2 = \{r_t, Ir_t \mid r_t < 5.5, Ir_t \geq r_t - 4\} \\ R_3 = \{r_t, Ir_t \mid 5.5 \leq r_t < 7, Ir_t < r_t - 4\} \\ R_4 = \{r_t, Ir_t \mid 5.5 \leq r_t < 7, Ir_t \geq r_t - 4\} \\ R_5 = \{r_t, Ir_t \mid 7 \leq r_t < 8.5, Ir_t < r_t - 4\} \\ R_6 = \{r_t, Ir_t \mid 7 \leq r_t < 8.5, Ir_t \geq r_t - 4\} \\ R_7 = \{r_t, Ir_t \mid r_t \geq 8.5, Ir_t < r_t - 4\} \\ R_8 = \{r_t, Ir_t \mid r_t \geq 8.5, Ir_t \geq r_t - 4\} \end{array} \right.$$

次式のように遷移確率は表される(時間の単位は5年)。

$$(4.24) \quad p(i, i') = \Pr((r_t, Ir_t) \in R_{i'} \mid (r_{t-1}, Ir_{t-1}) \in R_i)$$

この定義の下で過去データにより遷移確率を求める。計算結果については山下・矢頭(1995b)。

②リターンモデルから、各資産及びインフレ率の各状態ごとの5年年率リターンの平均・リスクを求める

図8に計算結果を示す。

③状態の定常確率を求める

①の状態遷移確率から、債券利回り・インフレ率の組合せの定常確率を計算する。

④政策を与える

状態①で想定した8種類。

資産比率の刻み幅は、ケース2と同じく下記の通り。

株式比率 ... 0~30%まで, 5%刻み(7通り)

コール比率 ... 10~30%まで, 10%刻み(3通り)

債券比率 ... 残余

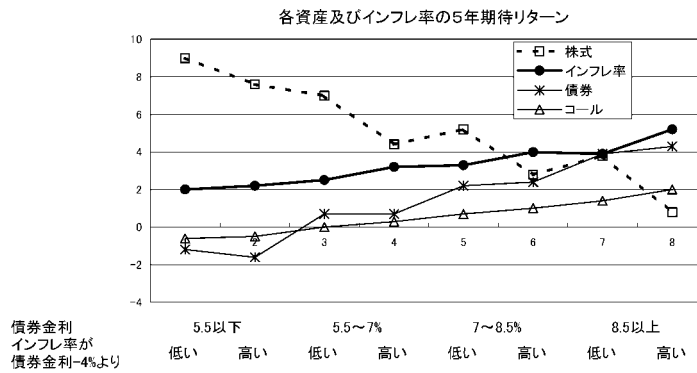


図 8. インフレおよび債券金利水準ごとの5年期待リターン。

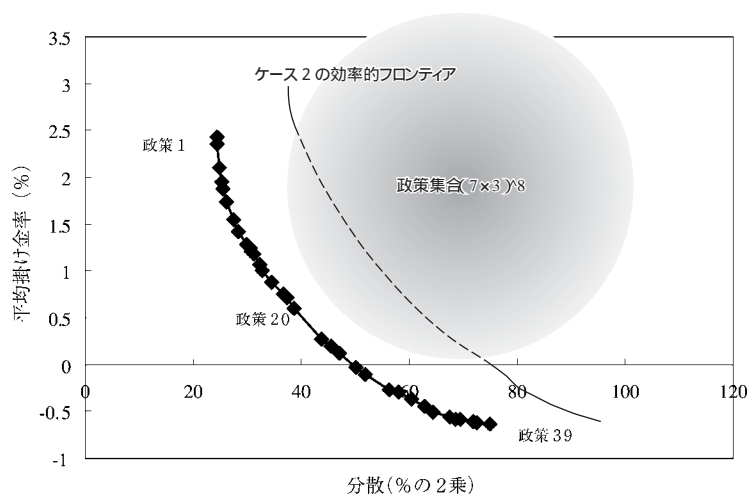


図9. パレート最適な政策と効率的フロンティア(ケース3).

⑤ すべての政策に対して、掛金率の無限期間の平均・リスクを計算する

ケース3と同様に、掛金率の無限期間の平均・リスクを計算する

⑥ 最適政策を選択する

計算された各政策の平均・分散から、効率的フロンティア上の政策を選択する。フロンティア上には39の政策を示す点がある。

図9に効率的フロンティアを示した。ケース2の図6と比較すると、フロンティアが縦軸に近づいている。これは状態のパターンを5種類から8種類に増やしたこと、状態の要素をインフレ率のみから、債券利回り・インフレ率の組合せにしたことにより、選択肢が増加したことが原因と考えられる。また、ケース1, 2と同様に3種類の政策資産比率を図10に示した。

## 5. 考察と課題

### 5.1 最適化方法に関する考察

本論文ではマルコフ計画モデルを提案したが、「政策選択によって状態の変化を記述できる」というマルコフ計画法の利点を生かさず、状態を政策とは独立なものとして定義した。そのため、マルコフ計画法の解法を用いることはできず、総当たり法により解を導いた。しかし、式(3.1)および式(4.14)(4.15)などで定義されたこの問題は、最適政策選択の段階で通常の2次計画法で解の導出が可能である。つまり、状態数×資産数の操作変数(状態ごとの資産比率)を定義し、連続変数の最適化計算をおこなうことになり、より精緻な解を導き出すことができる。そのため、本論文で試みた総当たり法による計算負荷をおわなくとも、効率的フロンティアを比較的容易に得ることができる。

しかしながら、年金のアセット・アロケーションは実務的には大まかな資産比率を決定するだけで十分であり、連続変数による解を必ずしも求められていない。さらに、今後の発展性を考えるとき、売買コストを取引量の関数と定義した動的戦略や、リスク許容度の時間的低減( $\beta$ 最適政策)などの効果を最適化条件に含める場合にはマルコフ計画法の概念が役に立つ。そのため、このような離散選択モデルも今後有効になってくる可能性があると考えられる。

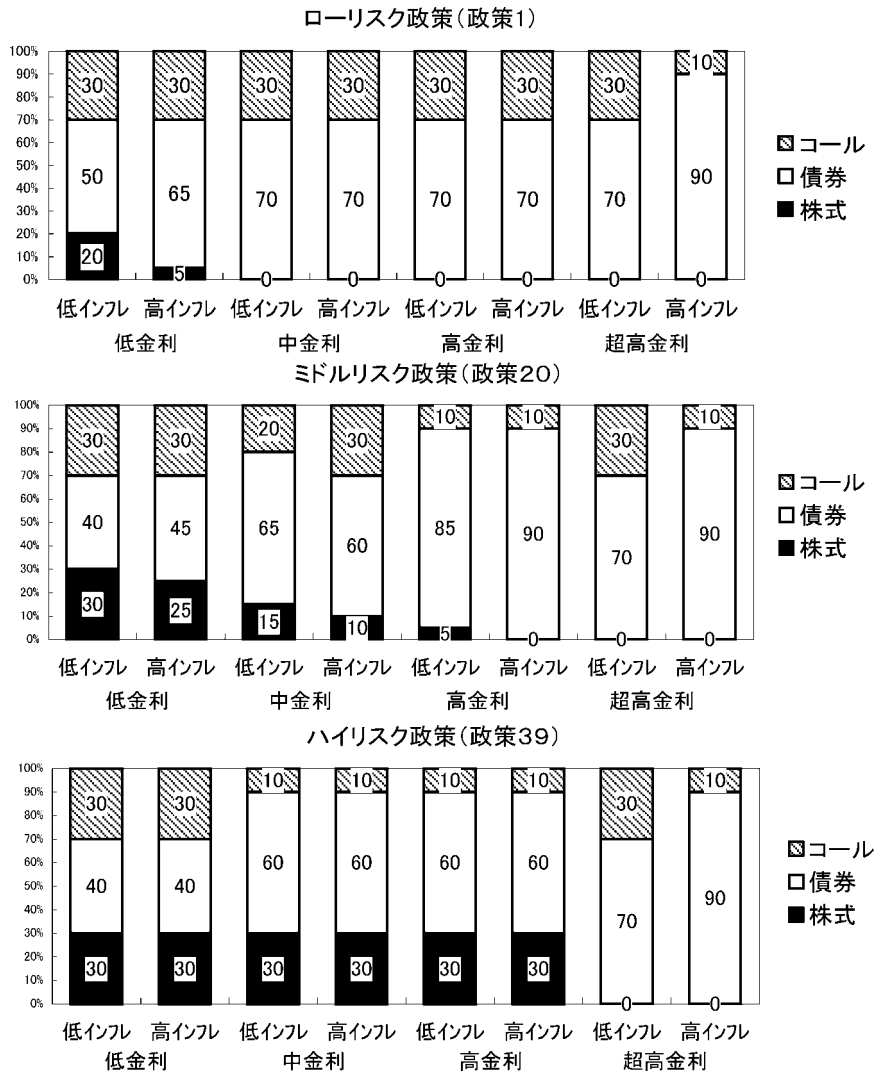


図 10. パレートに最適な政策の資産配分比率(ケース 3:インフレ率と金利水準による掛金率低下戦略).

5.2 まとめ

年金 ALM を考えるに当たって、最適化の効用の基準として現在一般に用いられている収益率の平均分散アプローチではなく、年金の負債条件を考慮した掛け金率変化に対する平均分散アプローチを用いた。これは年金運用者が、加入者から求められている要件をより正確に反映した方法である。また、投資期間の観点から資金の性格と多期間モデルの適合性を検討した。本研究ではそのうち状態推移のマルコフ性を仮定して、これまで検討の対象とならなかった定常確率過程の無限期間における最適資産配分政策を求めることを試みた。投資期間の終了時期を明確に設定しないこの方法は、永続が前提となっている年金基金の性格に合致するものであり、資産配分戦略を決定するひとつの手法になりうる。

なお、本研究では総当たり法により解を求めているが、これは有効な整数計画法の計算ツールがなかったためである。しかし近年、整数計画法のプログラムが供給され始めているので、今後これを用いてより精度の高い計算を試み、マルコフ計画法の実用化について検討したいと考えている。

注。

注1. 年金制度には次のように、効用を掛金率の(単調減少)関数とおくことが現実的でない場合がある。

- ①規約上、掛金率が下げられない制度制約がある。
- ②時価ではなく簿価の金額が、掛金率計算では反映される。
- ③節税対策のために適格年金を採っている事業主にとって、剰余金が発生することは好ましいことではない。

本研究ではこれらの点について、上記の①については「剰余金の発生」を「掛金率の引き下げ」が行われたものとみなす。②については、時価会計による評価が定着しつつあるため問題にしない。③のケースは投資理論の問題ではないとし、考慮しない。③については、このような目的の基金はもともと金融工学的な研究対象であるといえない。

注2. 年金数理における定常状態とは、基金設立時に発生する初期過去勤務債務(基金設立前の勤務に対応する将来の給付の現在価値で未償却のもの。基金設立時にはそれに対応する積立金はない)の償却が終了した後に基金が存続する限り継続する状態をいう。

謝 辞

本論文の執筆にあたって、匿名のレフェリーから連続変数による最適化方法の利用可能性について指摘をいただいた。5.1節で解説したように本論文で取り上げた方法は、2次計画法などを用いることにより容易に解を得ることができ、その分モデルの状態変数を複雑に定義しても計算負荷を現実的な範囲内に納めることができる。今回は残念ながらその指摘を計算に生かすことができなかったが、今後モデルをより実用的に改良する際において、連続変数によるモデリングも検討したいと思っている。有益な指摘に感謝の意を示したい。

## 参 考 文 献

- Chung, K-J.(1994). Mean-variance tradeoff in an undiscounted MDP: The unchain case, *Oper. Res.*, **42**(1), 184-188.
- 枇々木規雄(2001). 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル, *J. Oper. Res. Soc. Japan*, **44**(2), 169-193.
- 本多俊毅(1999). 投資機会が変動する場合の最適ポートフォリオについて, *現代ファイナンス*, **6**, 19-45.
- 本多俊毅(2002). 多期間モデルの視点から考えたアセット・アロケーション, *証券アナリストジャーナル*, **40**(2)60-71.
- 金崎芳輔(1994). 多期間の効用最大化と矛盾のないタクティカル・アセット・アロケーション(TAA)とそのシミュレーション, *MTP フォーラム機関誌*, No. 2.
- Kawai, H.(1987). A variance minimization problem for a Markov decision process, *European Journal of Operational Research*, **31**, 140-145.
- 小河原正巳, 坂本武司(1987). 『情報科学講座(マルコフ過程)』, 共立出版, 東京.
- Lucas, R. E., Jr. (1978). Asset prices in an exchange economy, *Econometrica*, **46**, 1429-1495.

- Merton, R. C. (1969). Life time portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case, *Review of Economics and Statistics*, **51**, 247–257.
- Merton, R. C. (1971). Optimal consumption and portfolio rules in continuous-time model, *J. Econom. Theory*, **3**, 373–413.
- 森村英典, 木島正明(1991). 『ファイナンスのための確率過程』, 日科技連, 東京.
- Mulvey, J. and Vladimirou, H. (1989). Stochastic programming optimization models for investment planning, *Ann. Oper. Res.*, **20**, 187–217.
- Samuelson, P. A. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming, *Review of Economic Statistics*, **51**(3), 239–246.
- Sobel, M. J. (1994). Mean-variance tradeoff in an undiscounted MDP, *Oper. Res.*, **42**(1), 175–183.
- 竹原 均(1994). アセット・アロケーション問題に対する下方リスクモデルの適用と多期間モデルへの拡張, 1994 年度 JAFEE 冬季大会予稿集, 208–221.
- 多田羅智之, 枇々木規雄(2001). 多期間確率計画モデルの年金 ALM への適用, JAFEE2001 夏季大会予稿集, 350–366.
- 山下智志, 矢頭智夫(1998). 年金 ALM の視点から見た年金数理計算, シミュレーション, **17**(4), 285–292.
- 矢頭智夫, 山下智志(1995a). 年金 ALM における感応度分析と掛金率計算の簡略化, Research Memo., No. 545, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- 矢頭智夫, 山下智志(1995b). MDP による年金 ALM の無限期間最適化問題, Research Memo., No. 577, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

## Infinite Period Asset and Liability Management for Pension Fund

Satoshi Yamashita

(The Institute of Statistical Mathematics)

Tomoo Yato

(Nomura Research Institute, Ltd.)

Recently, there has been extensive study on asset and liability management (ALM) as a multi-period portfolio selection problem. However, most studies have assumed finite investment periods and consequently cannot be implemented in actual asset management. This paper takes the pension fund ALM as an example with an infinite investment horizon and proposes a method for constructing an optimum multi-period portfolio. In the process of deriving the main result, problems in dynamic programming and scenario analysis are pointed out and we compare their pros and cons. We apply the Markov decision process (MDP) to solve the pension fund ALM problems. The method's validity is examined based on a criterion that focuses on the changes in the rate of pension premium.