

# MBS 評価における CPR モデルの パラメータセンシティブリティ

片岡 淳<sup>†</sup>

(受付 2005 年 9 月 30 日; 改訂 2006 年 5 月 26 日)

## 要 旨

MBS (Mortgage-Backed Securities) の理論価格やリスク指標の推定値はその評価モデルに大きく依存するため、もしそのモデルが不安定でパラメータ推定値に誤差を含む場合は、理論価格やリスク指標にも誤差を含むことになる。MBS ポートフォリオのリスク管理を考える場合にこの誤差の影響が無視できないならば、評価モデルが不安定であることを前提としてリスク管理を行う方が合理的である。このためにはまず、パラメータの変化に対してどの程度リスク指標が変化するか、すなわちリスク指標のパラメータセンシティブリティを計量的に把握することが必要となる。

本研究はこのパラメータセンシティブリティの計量化を試みた。このための方法として、まず貸付債権担保住宅金融公庫債券 (RMBS) を対象に、CPR (期前償還率) モデルを実際のデータを用いて推定した。

次に、RMBS の理論価格及びデュレーション等のリスク指標をモンテカルロ・シミュレーションにより求めた。最後に、シミュレートしたデータに基づいて、理論価格及びリスク指標のパラメータセンシティブリティを計算した。リスク指標やパラメータによりそのセンシティブリティが異なることや、市場金利が変化することによりパラメータセンシティブリティが変化することが確認された。これらの結果は、評価モデルの不安定性を前提とするリスク管理手法への展開に応用が可能であり、より厳密なリスク管理手法の開発に資するものであると考えられる。

キーワード: MBS, CPR モデル, デュレーション, コンベクシティ, WAL, パラメータセンシティブリティ。

## 1. はじめに

MBS (Mortgage-Backed Securities) は広義の資産証券化商品の一種で、多数の住宅ローン債権のプールを担保に発行する債券であり、住宅ローン債権から発生する元本と利息の一部を投資家側に支払う仕組みになっている。

わが国では 2001 年 3 月に住宅金融公庫から貸付債権担保住宅金融公庫債券<sup>1)</sup> (以下、RMBS: Residential Mortgage-Backed Securities) が発行され、それ以降定期的に債券が発行されている。その発行残高は 2005 年 4 月末時点で 2 兆 3183 億円に達し、NRI-BPI など主要な債券インデックスに導入されたこともあり、債券インデックス運用を行う機関投資家は RMBS を資産クラスとしてポートフォリオに組み入れつつある。

<sup>†</sup> 総合研究大学院大学 複合科学研究科: 〒106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7; kataoka@ism.ac.jp

住宅資金を住宅金融公庫(以下、公庫と略す)から借り入れた債務者は、毎月契約で定められた金額(元本及び利息)を支払う義務があるが、債務者側の都合によって、それ以上の金額を償還することができる。これを期前償還(prepayment)と呼ぶ。全額を返済することも可能であるし、一部を返済することも可能である。公庫の発行するRMBSはこの期前償還金がパススルーされ、そのまま投資家側に支払われる。債務者側からすると、債務者に都合の良い時に期前償還する選択権を持つことから、アメリカン・オプションを内包していると言うことができる。このため、投資家側からすると、いつどの程度の償還が発生するかが予見できず、予想外の再投資を行わなければならない。これをプリペイメントリスクと呼ぶ。

プリペイメントリスクがある証券は、債券投資において重要なデュレーション、コンベクシティなどのリスク指標が普通債とは大きく異なる。アメリカン・オプションの価格評価やリスク評価の手法はすでに確立しているが、MBSの場合、データからは債務者が必ずしも合理的に行動するようには見えないため、これらの手法を直接用いることができない。プリペイメントリスクを計量化するためには、期前償還率(Conditional Prepayment Rate: CPR)の予測が必要となる。ローンを多数プールしたMBSでは、債務者全体に影響を与える要因、例えば借換え金利の変動や季節要因などにより、CPRの変動をある程度説明することが可能であると考えられる。

このため、実務で用いられているシステムでは、過去のCPRデータからその将来の変動を予測するモデルを推定する方法が用いられていることが多い。この場合、予測的中率が重視される傾向がある。しかし、リスク管理の観点から考えると、CPRモデルの予測的中率を追求するよりも、モデルに依存する価格やリスク指標の推定誤差を知っておくことがより重要であると思われる。このため本研究は、MBSの理論価格及びリスク指標のCPRモデルのパラメータセンシティビティを求めめることを目的とする。そのための方法として、実際のデータからCPRモデルを推定し、シミュレーションにより理論価格及びリスク指標を計算し、それらのパラメータセンシティビティを計算する。

以下、本稿の構成は次の通りである。2章では先行研究について概要を説明する。3章ではCPRモデル推定に用いたデータ、推定方法、推定結果について説明する。4章では、MBSの理論価格を求めめる方法を示す。5章ではパラメータセンシティビティの計算結果を示す。

## 2. 先行研究

米国では1970年代からMBSが継続的に発行されており、ファイナンス理論の急速な進展に伴い、MBSに関する理論研究及び実証分析の膨大な成果がある。このため、本章では本研究を行うにあたって参考にした代表的な研究について記す。Richard and Roll(1989)は実務的な観点から、借換え金利インセンティブ、MBSの経年効果、季節変動効果、及びバーンアウト効果<sup>2)</sup>を考慮し、これらの効果を積算しCPRを予測する方法を提案した。統計的手法によるMBSの価格付けの代表的な研究としてはSchwartz and Torous(1989)が挙げられる。Schwartz and Torous(1989)は、CPRモデルに比例ハザードモデルを用い、金利モデルにはBrennan and Schwartz(1979)による長短金利プロセスを用いている。過去データを利用し最尤法によりパラメータを推定している。そしてMBSの満たすべき確率微分方程式を示し、モンテカルロ・シミュレーション法によりMBSの理論価格を導いた。これに対して、Stanton(1995)は構造的アプローチと呼ばれる手法を提案している。この方法では、ローンの集合体を「様々なコストにより行使価格が分布した金利オプションの集合体」と捉え、債務者の行動はあくまでも合理的であると仮定している。

わが国における研究例としては、Schwartz and Torous(1989)の手法を拡張し、返済タイプ

別に CPR モデルを構築し実証分析を行った Sugimura (2002) の研究や, Nakamura (2001) の構造的アプローチを元にしたデフォルト・リスクも考慮した価格評価手法の研究などがある。また Kariya and Kobayashi (2000) による, パーンアウト効果を考慮した価格評価の手法なども提案されている。山崎 (2005) は MBS の価格付け手法を整理し, 金利モデルと CPR モデルの設定方法により MBS 理論価格の解析解が求まる例と求まらない例を具体例を挙げて説明している。

### 3. CPR モデル

本研究では CPR モデルのパラメータの推定誤差が価格及びリスク指標にあたる大きさを計測するために, Richard and Roll (1989) を参考に CPR モデルの要素とその合成法を提案する。

#### 3.1 データ

CPR モデルを作成するために使用する期前償還率と属性データには, 公庫が一般に公表している発行済みの RMBS の簡略化されたデータと, 一部に開示されている RMBS 発行以前からの詳細なデータがある。

前者は債務者や返済タイプなどの属性別の分類がされておらず, 発行された MBS の月次データなので観測数が少ない。後者は公庫が RMBS を発行する以前から足元までの長期間にわたる, 様々な属性別に細分化された膨大なデータである。後者は現在のところ公庫 RMBS の組成にかかわるか, あるいは Bloomberg 端末を導入し公庫の許可を得ない限り入手不可能である。

本研究では前者のデータを用いることとした。この理由は, 本研究の目的がパラメータセンシビリティの推定であるため, 必ずしも詳細なデータを用いる必要がないためである。2005

表 1. データ概要。

回号	発行日	発行額 (億円)	表面利率	観測数	平均 CPR	平均 WAC
1	2001/03/22	500	1.75 %	49	5.98 %	2.90 %
2	2001/06/21	500	1.78 %	46	5.96 %	2.89 %
3	2001/09/20	500	1.85 %	43	6.03 %	2.93 %
4	2001/12/20	500	1.82 %	40	4.83 %	2.67 %
5	2002/03/20	500	1.90 %	37	4.72 %	2.60 %
6	2002/06/21	1000	1.94 %	34	4.10 %	2.67 %
7	2002/08/22	1000	1.82 %	32	4.59 %	2.66 %
8	2002/10/23	1000	1.67 %	30	4.33 %	2.70 %
9	2002/12/20	1500	1.52 %	28	4.39 %	2.71 %
10	2003/02/21	1500	1.43 %	26	4.20 %	2.69 %
11	2003/06/11	1000	0.92 %	22	3.87 %	2.67 %
12	2003/09/11	1000	1.69 %	19	3.80 %	2.59 %
13	2003/12/08	300	1.67 %	16	4.11 %	2.64 %
14	2004/01/07	300	1.70 %	15	4.61 %	2.66 %
15	2004/02/05	300	1.69 %	14	4.46 %	2.66 %
16	2004/03/05	300	1.56 %	13	4.55 %	2.64 %
17	2004/03/29	300	1.64 %	12	4.22 %	2.65 %
Total		12,000		476		

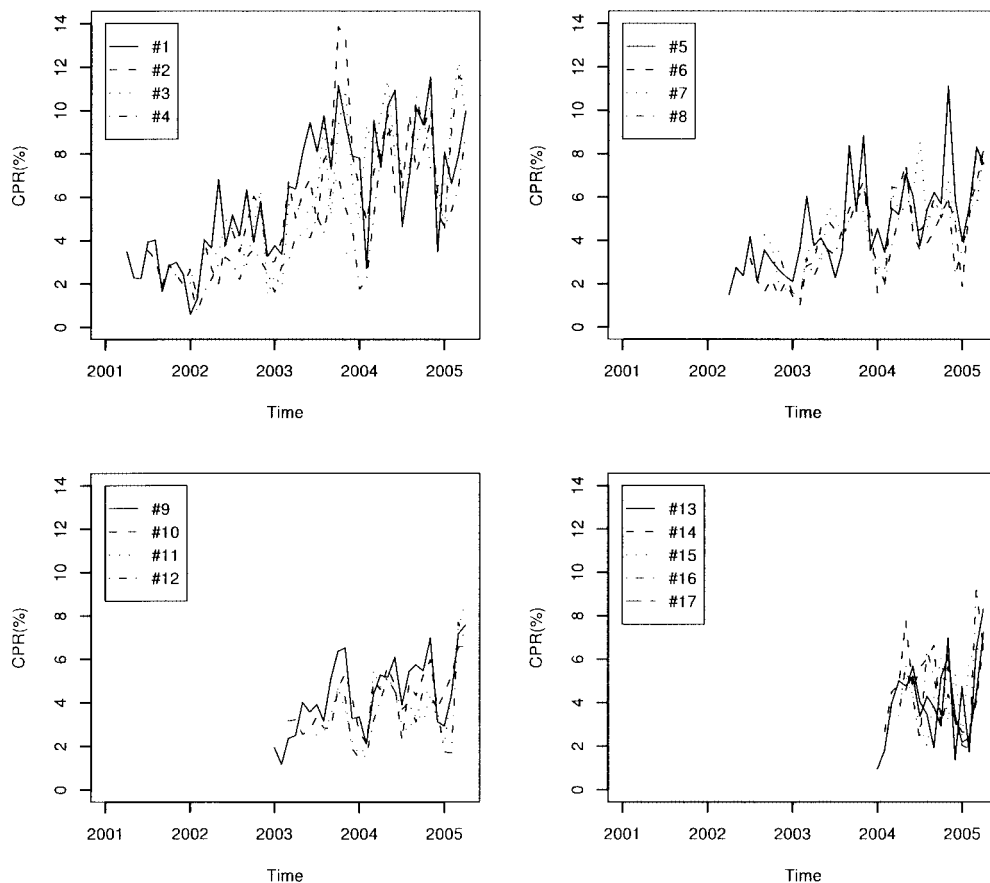


図 1. 実績 CPR.

年 4 月末時点では、すでに 30 回号までの RMBS が発行されている。これらの中から観測数が 12 個以上ある 17 回債までを分析対象とした。これらのデータ概要を表 1 に示す。データ期間は 2001 年 4 月から 2005 年 4 月までである。1 回号は観測期間中すべてデータが存在するが、それ以降発行された 2 回債以降は順を追うごとに発行時期が遅いため、徐々に欠損値が増えている。図 1 は各回号の CPR の推移を時系列でプロットしたグラフである。

### 3.2 CPR の変動要素

以下の 4 つを取り上げる。

#### 3.2.1 経年効果 (Seasoning Effect)

時間経過により CPR は変動する。ファイナンス理論による MBS 評価手法が確立するまで、米国では経験則として PSA<sup>3)</sup> 経験値と呼ばれる経年関数が用いられてきた。本研究ではこの関数型をそのまま用いて経年効果とし、以下のように表現する<sup>4)</sup>。

$$(3.1) \quad T_t \equiv \alpha + \min(t, \tau)\eta$$

$T_t$  は時間  $t$  の関数であるが、 $\alpha$  は切片、 $\eta$  は  $t$  に対する傾きを表す。なお、 $T_t$  は  $t < \tau$  までは  $t$

の経過に従って増加するが、 $t \geq \tau$  では  $\alpha + \eta\tau$  で一定となる。

### 3.2.2 金利インセンティブ効果

借換え金利の変動により、債務者にとって借換えが有利になったり不利になったりする。米国における先行研究の結果から、金利インセンティブと CPR の関係は非線形であり、インセンティブの増大に伴って加速的に CPR が上昇することが知られている。また、本研究では債務者の金利の変化トレンドに対するマインドが期前償還に影響を与える可能性があるかと仮定し、検証を行う。このため各々の要素を以下のように定式化する。

#### i) 借換えインセンティブ効果(Refinancing Incentive Effect)

借換えインセンティブを以下により定義する。金利インセンティブの変化と実際の借換えまではタイムラグがあると仮定する。このため、このラグを  $\ell$  とし、 $t$  時点における借換え金利を  $\psi_t$ 、 $t$  時点における  $j$  回号の WAC<sup>5)</sup> を  $W_{jt}$  とし、借換えインセンティブを

$$(3.2) \quad i_{jt} \equiv \psi_{t-\ell} - W_{jt}$$

と定義する。借換え金利  $\psi_{t-\ell}$  としては 10 年国債のパーイールドを代理変数として用いる。なおこのように定義した場合、 $i_{jt}$  の値が小さいほど借換え金利が低いと仮定し、債務者に対する借換えインセンティブが働く。

#### ii) 金利変化トレンド効果

$t$  期の金利の変化傾向を以下のように定式化する。これは過去の借換え金利に対して、時間を説明変数として線形回帰を行った場合の回帰係数に相当する。事前の検討により、5ヶ月間の変化トレンドを用いる。この変数  $\xi_t$  を以下のように定義する。

$$(3.3) \quad \xi_t \equiv \sum_{n=-2}^2 \frac{n \cdot r_{t-n-2}}{2!}$$

#### iii) 金利変動が CPR に与える影響

インセンティブの増大に伴う CPR の加速的な上昇を表現するために、上記 2 つの効果を以下のように指数関数により合成し、金利インセンティブ効果と定義する。 $\beta_1$  及び  $\beta_2$  は各々借換え金利効果、及び金利変化トレンド効果に対する CPR の感応度を表す。

$$(3.4) \quad I_{jt} \equiv \exp(\beta_1 i_{jt} + \beta_2 \xi_t)$$

### 3.2.3 季節変動効果(Seasonal Effect)

公庫から発表されている CPR の実績データを観察すると、1 年周期の季節変動が含まれているように見える。これを明確に調べるため、1 回号から 16 回号のデータ<sup>6)</sup> に対して統計数理研究所の季節調整モデル DECOMP を用いて季節変動を抽出した結果を図 2 に示す。図 2 より明らかなように、12 月から翌年 2 月<sup>7)</sup> にかけて CPR が大きく減少する現象がみられ、12ヶ月周期の季節変動は明らかである。またこの季節成分データの事前検討の結果、7, 8, 9 月に若干 CPR が高まっていることがわかった。

季節変動を抽出する方法としては、毎月の季節成分要素を  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_{12}\}$  により表現する方法が考えられる。しかしながら、事前の検討の結果、この方法はパラメータ数が過多であるためモデルが不安定となることが分かった。このため、本研究では季節成分として以下に示すように季節成分数  $\gamma$  が 2 要素の方法と 3 要素の方法を試行し、より良い結果の得られる方法を選択することとする。

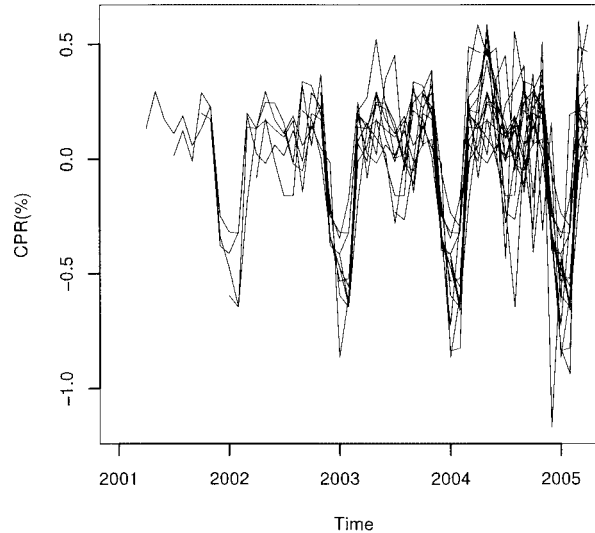


図 2. DECOMP により抽出した CPR の季節変動成分 .

### 2 要素( $\gamma=2$ )

$$(3.5) \quad S_k^2 \equiv \begin{cases} q_1^2 & \text{if } m=12,1,2 \\ q_2^2 & \text{else} \end{cases}$$

ただし  $(q_1^2)^3(q_2^2)^9=1$ ,  $m$  は当該月を表す .

### 3 要素( $\gamma=3$ )

$$(3.6) \quad S_k^3 \equiv \begin{cases} q_1^3 & \text{if } m=7,8,9 \\ q_2^3 & \text{if } m=12,1,2 \\ q_3^3 & \text{else} \end{cases}$$

ただし,  $(q_1^3)^3(q_2^3)^3(q_3^3)^6=1$ ,  $m$  は当該月を表す .

#### 3.2.4 メディア効果

メディア効果は、期前償還に影響を与える情報が、新聞、TV あるいはインターネットなどにより広く一般の債務者に伝わることにより、債務者の期前償還行動に変化が起こることを指す。再び図 1 のデータを観察してみると、2003 年 10 月から 2003 年 12 月まで期前償還率が非常に高い水準となっている。この時期に各種メディアは住宅ローン減税廃止の可能性を盛んに報道した。住宅ローン減税は、その施行時に 2003 年度までの時限的措置であるとの文言が盛り込まれていたためである<sup>8)</sup>。結果的に延長が決まったが、この間に債務者が駆け込み的にローン残高を減らそうとしたことにより期前償還率が高まったと考えられる。この期間のメディア効果に対する仮説として以下のメディア効果変数を用いる。 $\phi$  はメディア効果の感応度である。

$$(3.7) \quad Q_t \equiv \begin{cases} 1 + \phi & \text{if } \text{Oct.2003} \leq t \leq \text{Dec.2003} \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

### 3.2.5 各要素の独立性

各要素を合成する前に、各要素の独立性について検討を行う。経年効果は  $\alpha=0, \eta=1$  とし、 $T_t = \{1, 2, \dots, 49\}$  とする。借換えインセンティブは各銘柄の WAC( $W_{jt}$ )の変動により銘柄間の変動傾向が若干異なるが、その差はわずかであるため、第 1 回号の借換えインセンティブ  $i_{1t}$  を用いて検証する。また、季節変動要因はまだ推定されていないので、 $q_1^2, q_1^3, q_2^3$  はその当該月に 1 とし、それ以外の月では 0 として検討を行う。また、同様にメディア効果変数は(3.7)式において  $\phi=1$  とする。

相関係数の計算結果を表 2 に示す。金利変化トレンド効果  $\xi_t$  は他の要素とやや相関係数の絶対値が大きく、経年効果  $T_t$  との相関係数が 0.356、借換えインセンティブ効果  $i_{1t}$  とは -0.248、メディア効果とは 0.555 となっている。また、借換えインセンティブ効果  $i_{1t}$  とメディア効果との相関係数は -0.224 である。それ以外の要素間の相関係数の絶対値は小さい。

また、多重共線性の検証のため、分散拡大要因(VIF)を求めた結果が表 3 である。VIF はすべての要素で 2 以下となっている。金利変化トレンド係数  $\xi_t$  では VIF が  $\gamma=2, 3$  どちらの場合でも約 1.7 と他の要素よりやや高いが、多重共線性が問題になるほどの大きさではないと考えられる。その他の要素ではすべて VIF が 1.2 以下となっている。このため各要素をそのまま用いて CPR モデルを推定する。

### 3.2.6 各要素の合成

Richard and Roll(1989)の方法を参考に、各要素を乗じることにより行う。なお、残差項は合成されたものに加算する方法とする。 $G_t$  を CPR の実績値とすると、

$$(3.8) \quad G_t = T_t \cdot Q_t \cdot I_t \cdot S_k^\gamma + \varepsilon_t$$

表 2. 各要素の相関係数行列。

	$T_t$	$i_{1t}$	$\xi$	$q_1^2$	$q_1^3$	$q_2^3$	$\phi$
$T_t$	1						
$i_{1t}$	0.051	1					
$\xi_t$	0.356	-0.248	1				
$q_1^2$	-0.121	-0.005	-0.072	1			
$q_1^3$	-0.081	-0.135	-0.038		1		
$q_2^3$	0.121	0.005	0.072			1	
$\phi$	0.126	-0.224	0.555	-0.053	-0.145	0.053	1

表 3. 分散拡大要因(VIF)。

$\gamma = 2$		$\gamma = 3$	
Factor	VIF	Factor	VIF
$T_t$	1.192	$T_t$	1.193
$i_{1t}$	1.101	$i_{1t}$	1.131
$\xi_t$	1.706	$\xi_t$	1.711
$q_1^2$	1.017	$q_1^3$	1.180
$\phi$	1.471	$q_2^3$	1.133
		$\phi$	1.517

ここで、 $\gamma = 2, 3$  である。また  $k$  は  $t$  の月に対応するラベルであり、 $\gamma = 2$  の場合  $k = 1, 2$ 、 $\gamma = 3$  の場合  $k = 1, 2, 3$  である。また、 $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  である。

### 3.3 パラメータの推定方法

表 1 に示したように、データには欠損値が存在し、観測時点の前半ほど欠損値が多い。事前の検討の結果、この欠損値の偏りにより各要素を十分に抽出できないことがわかった。このため、モデル推定においては観測時点ごとの観測値の個数により重み付けを行い、以下のように対数尤度関数をおいた。

$$(3.9) \quad LL(\theta) = \sum_{j=1}^N \sum_{t=\tau_j}^T \left[ \frac{1}{M_t} \left[ -\frac{1}{2} \{ \log(2\pi\sigma^2) \} + \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (G_{jt} - T_{jt} \cdot Q_{jt} \cdot I_{jt} \cdot S_k^\gamma) \right\}^2 \right] \right]$$

ここで、 $T$  は観測期間、 $M_t$  は  $t$  時点の観測値の個数、 $N$  は総回号数、 $G_{jt}$  は  $j$  回号の  $t$  時点の CPR の実績値、 $\tau_j$  は  $j$  回号の観測開始時点である。また、前述のとおり  $k$  は  $t$  の月に対応するラベルである。

#### 3.3.1 モデル推定のケース

モデル推定に当たっては、タイムラグについて  $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  全てに対して最尤推定法を用い、AIC 最小となるモデルを選択した。

#### 3.3.2 推定結果

ラグはすべてのケースでほぼラグ  $\ell = 2$  が最適であった。表 5 にこの場合のパラメータ推定結果を示す。

この結果、Model 7 が AIC 最小となり、最適なモデルである。Model 7 では  $t$  値の絶対値は全てのパラメータにおいて 2 よりも大きく、パラメータ推定値は安定しているものと思われる。また  $\beta_2$  が選択されなかったことから金利トレンド効果  $\xi_t$  は CPR の変動にほとんど影響を与えていないと考えられる。季節性は 2 要素が最適であった。なお、このモデルにおける CPR 関数のイメージは図 3 のようになる。なお、図 3 上段では、グラフの見やすさのため季節成分は除外している。また、グラフの線は上から借換えインセンティブ  $i_{jt}$  が  $-6\%$  から  $9\%$  まで  $1\%$  刻みで表示している。下段では借換えインセンティブ  $i_{jt} = -3\%$  として季節成分を反映している。

#### 3.3.3 1ファクター短期金利モデル

金利の変動を表現する金利モデルとしては多様な形式が提案されている。この中で、特にその時系列変動の特徴に注目した研究として、Chan et al. (1992) がある。この研究では短期金利について以下のような 9 種類の時系列モデルによる検討が行われている。

モンテカルロ・シミュレーションによる金利派生証券の価格付けなどの実務的な応用を考慮した場合、 $t \rightarrow \infty$  で  $\text{Var}[x] \rightarrow \infty$  となるモデルは扱いにくく、平均回帰の特性を持つモデルが扱いやすい。

さらに、近年の超低金利局面における実務応用を考慮した場合、Vasicek のような正規分布モデルは負の金利が発生する可能性があるためミス・プライシングとなる可能性がある。このため負の金利が発生しない CIR SR<sup>(9)</sup> モデル、並びに Brennan and Schwartz モデル、及び上記 Unrestricted モデルのように、拡散項に金利水準のべき乗が乗じられているモデルを選択すべきであるが、本研究では学術的研究及び実務で多く利用される CIR SR (以下、単に CIR と記す) モデルを選択する。なお、CIR モデルのパラメータは、本研究シミュレーション期間のほぼ直前までのデータによって推定された乾・室町(2000)を参考とした。この場合のパラメータは  $\alpha = 0.000773$ 、 $\beta = -0.02658$ 、 $\sigma^2 = 0.000508$  である。これを Cox et al. (1985) に基づき、短



表 4. 推定するモデル .

Model 1	水準
Model 2	水準・経年効果
Model 3	水準・経年効果・借換えインセンティブ効果
Model 4	水準・経年効果・金利変化トレンド効果
Model 5	水準・経年効果・借換えインセンティブ効果・金利変化トレンド効果
Model 6	水準・経年効果・借換えインセンティブ効果・金利変化トレンド効果・季節効果 (2)
Model 7	水準・経年効果・借換えインセンティブ効果・季節効果 (2)
Model 8	水準・経年効果・借換えインセンティブ効果・金利変化トレンド効果・季節効果 (3)
Model 9	水準・経年効果・借換えインセンティブ効果・季節効果 (3)

表 5. パラメータ推定結果 . 上段 : 推定値 , 下段 :  $t$  値 .

	$\alpha$	$\eta$	$\beta_1$	$\beta_2$	$q_1^2$	$q_1^3$	$q_2^3$	$\phi$	AIC
Model 1	3.951 (38.19)							2.308 (5.65)	206.048
Model 2	2.141 (20.69)	0.147 (23.27)						1.637 (4.01)	192.608
Model 3	1.501 (20.46)	0.106 (23.43)	-0.151 (-14.63)					1.270 (4.28)	196.427
Model 4	2.134 (20.65)	0.148 (23.28)		-0.036 (-0.29)				1.724 (4.17)	196.603
Model 5	1.473 (20.51)	0.103 (23.43)	-0.161 (-15.61)	0.047 (0.38)				1.169 (4.09)	198.420
Model 6	1.643 (20.19)	0.125 (24.44)	-0.083 (-8.25)	-0.126 (-1.02)	0.682 (-7.77)			1.824 (5.14)	191.177
Model 7	1.543 (20.40)	0.115 (24.30)	-0.119 (-11.72)		0.684 (-7.71)			1.482 (4.70)	189.244
Model 8	1.612 (20.33)	0.121 (24.39)	-0.096 (-9.48)	-0.077 (-0.62)		1.093 (2.44)	0.685 (-8.74)	1.605 (4.80)	193.025
Model 9	1.555 (20.46)	0.115 (24.32)	-0.116 (-11.48)			1.088 (2.32)	0.686 (-8.69)	1.404 (4.50)	191.048

期金利  $r$  の回帰水準  $\theta$  と回帰スピード  $\kappa$  により

$$(3.10) \quad dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

と書き換えると, 回帰水準  $\theta = 2.746\%$ , 回帰スピード  $\kappa = 0.02658$  となる.

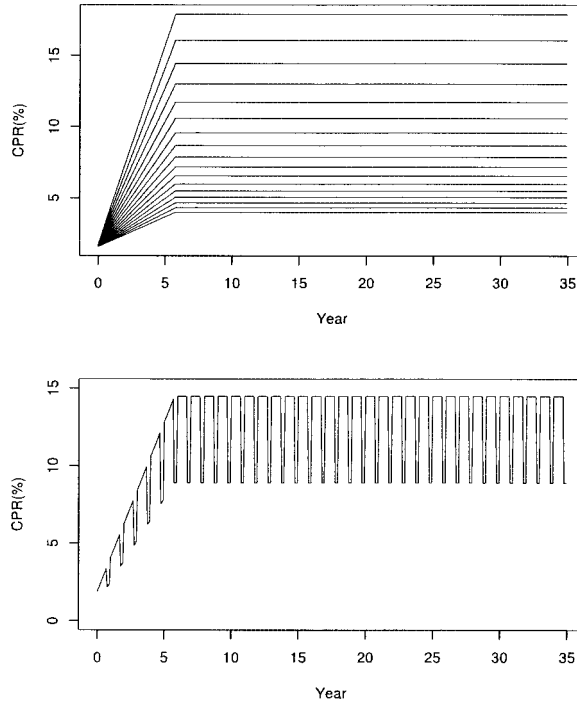


図 3. CPR モデルのイメージ .

表 6. 連続時間短期金利モデルのタイプ .

Merton	$dx_t = \alpha dt + \sigma dB_t$
Dorthan	$dx_t = \sigma x_t dB_t$
Geometric Brownian Motion	$dx_t = \beta x_t + \sigma dB_t$
Vasicek	$dx_t = (\alpha + \beta x_t) dt + \sigma dB_t$
CIR SR	$dx_t = (\alpha + \beta x_t) dt + \sigma \sqrt{x_t} dB_t$
Brennan-Schwartz	$dx_t = (\alpha + \beta x_t) dt + \sigma x_t dB_t$
CIR VR	$dx_t = \sigma x_t^{\frac{3}{2}} dB_t$
CEV	$dx_t = \beta x_t dt + \sigma x_t^{\gamma} dB_t$
Unrestricted	$dx_t = (\alpha + \beta x_t) dt + \sigma x_t^{\gamma} dB_t$

#### 4. RMBS の価格及びリスク評価

##### 4.1 金利モデル

##### 4.1.1 金利パスの発生方法

Cox et al. (1985) によれば, 短期金利  $r$  が式 (3.10) によって表現される場合,  $t$  時点における満期  $T$  のスポットレート  $R(r, t, T)$  は,

$$(4.1) \quad R(r, t, T) = [rB(t, T) - \log(A(t, T))]/(T - t),$$

ただし,

$$A(t, T) \equiv \left[ \frac{2\gamma e^{(\kappa+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \right]^{2\kappa\theta/\sigma^2},$$

$$B(t, T) \equiv \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma},$$

$$\gamma \equiv \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2},$$

である。これにより、任意時点  $t$  における任意の残存期間のスポットレートが得られる。

#### 4.2 RMBS のキャッシュフローと理論価格の計算方法

##### 4.2.1 期前償還が発生しないと仮定した場合

MBS の担保に組み入れられる住宅ローンには、支払い回数や利率などの属性に違いがあり、利息はその一部が投資家に支払われる。公庫 RMBS については、公庫から毎月「予定ファクター」という情報が公表されている。これは発行時から償還までの毎月の元本推移を予測した値である。なお、公表データが月次であるため、本研究では時間単位  $t$  を月次 ( $1/12$  年) として以下の計算を行う。

予定ファクターは毎月の元本償還と次の関係がある。

$t$  期の予想ファクターを  $A_t$  とすると、予定元本償還額  $P_t$  は、

$$(4.2) \quad P_t = A_{t-1} - A_t$$

により与えられる。また、RMBS の利率を  $c$  とすると、 $t$  期における利息は以下により与えられる。

$$(4.3) \quad i_t = A_{t-1} \cdot \frac{c}{12}$$

このため、予定された毎月のキャッシュフローは、

$$(4.4) \quad CF_t = P_t + i_t$$

である。

##### 4.2.2 期前償還が発生する場合の MBS のキャッシュフロー

期前償還の分析を「ローンが期前償還されるまでの時間の観察」と捉え、生存時間解析の手法を適用することができる。連続時間においてローンの生存時間、すなわち「ローンが時刻  $t$  まで解約されない」確率を  $S(t)$  とすると、

$$(4.5) \quad S(t) = \Pr(T > t)$$

である。さて、生存時間解析におけるハザード関数  $h(t)$  は生存関数と以下の関係がある。

$$(4.6) \quad h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot S(t)}$$

$$(4.7) \quad = \frac{d(\log(S(t)))}{dt}$$

ハザード関数は、 $t \leq T$  となる条件の下で次の瞬間にイベントが起きる確率を意味する。離散時間では、ハザード関数は

$$(4.8) \quad h_t = \frac{S_{t-1} - S_t}{S_{t-1}}$$

により与えられる。

期前償還によりプールされたローンの残高が減少していく現象は、生存時間解析において「個体にイベントが発生すること」<sup>10)</sup>と捉えることができる。以下、期前償還が発生する場合は変数に $\tilde{\cdot}$ (ティルダ)を付けて区別する。

元本 $\tilde{A}_t$ は生存関数を用いて、

$$(4.9) \quad \tilde{A}_t = A_t \cdot S_t$$

により計算できる(4.2)式及び(4.9)式より直ちに

$$(4.10) \quad \tilde{P}_t = P_t \cdot S_{t-1}$$

である。さて、MBSにおけるSMM(Single Monthly Mortality)とは、単月の期前償還率を表す言葉であるが、SMMは(4.8)式におけるハザード関数 $h_t$ に他ならない。

$t$ 期における予定元本残高、すなわち $t$ 期において期前償還される前の元本は、一期前の元本 $\tilde{A}_{t-1}$ から今期予定されている予定元本償還額 $\tilde{P}_t$ を減じた $(\tilde{A}_{t-1} - \tilde{P}_t)$ であるため、 $t$ 期の期前償還額 $\pi_t$ は、単月の期前償還率 $SMM_t$ から以下のように求めることができる。

$$(4.11) \quad \pi_t = (\tilde{A}_{t-1} - \tilde{P}_t) \cdot SMM_t$$

ここで、 $SMM_t$ と $CPR(r_t, t)$ の関係

$$(4.12) \quad SMM_t = 1 - (1 - CPR(r_t, t))^{-\frac{1}{12}}$$

を用いて、期前償還額 $\pi_t$ は

$$(4.13) \quad \pi_t = (\tilde{A}_{t-1} - \tilde{P}_t) \cdot \{1 - (1 - CPR(r_t, t))^{-\frac{1}{12}}\}$$

により与えられる。

$t$ 期の利息額は期前償還がない場合と同様に以下により与えられる。

$$(4.14) \quad \tilde{i}_t = \tilde{A}_{t-1} \cdot \frac{c}{12}$$

このため、 $t$ 期のキャッシュフローは期前償還額が加算され、以下により与えられる。

$$(4.15) \quad \tilde{C}F_t = \tilde{P}_t + \tilde{i}_t + \pi_t$$

残存期間 $t$ のディスカウント・ファクター $df_t$ は $t$ 時点の短期金利を $r_t$ とすると、

$$(4.16) \quad df_t = \prod_{s=0}^t (1 + r_s)^{-\frac{1}{12}}$$

期前償還がない場合のRMBSの理論価格は、 $df_t$ を用いて、

$$(4.17) \quad V = \sum_{t=1}^T (P_t + i_t) \cdot df_t$$

である。同様に期前償還がある場合のRMBSの理論価格は以下により与えられる。

$$(4.18) \quad \tilde{V} = \sum_{t=1}^T (\tilde{P}_t + \tilde{i}_t + \pi_t) \cdot df_t$$

## 5. CPR モデルのパラメータセンシティブリティ

### 5.1 RMBS のリスク指標

デュレーションとは、金利の変化に対する RMBS 価格の変動率であり、債券から発生するキャッシュフローを時間軸で見た場合の平均残存年数の代理変数でもある。なお金利-価格曲線は普通債では必ず右肩下がりとなるため、価格を金利で偏微分するとその値は負となる。伝統的にデュレーションの値を正にするため符号が逆転される。コンベクシティは金利-価格曲線の曲率を表すとともに、金利の変化に対するデュレーションの変動率を表す代理変数でもある。これらは RMBS の理論価格  $V$  から以下のように求められる(Tuckman, 2002)。

$$(5.1) \quad D = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$(5.2) \quad C = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

実効デュレーションは、以下のような方法で計算することができる。 $\Delta r$  をスポットレートの微小変化とし、スポットレートを  $+\Delta r$  シフトした場合の理論価格を  $V^+$ 、スポットレートを  $-\Delta r$  シフトした場合の理論価格を  $V^-$ 、スポットレートを変化させない場合の理論価格を  $V^0$  とすると、

$$(5.3) \quad D_{\text{eff}} = -\frac{1}{V^0} \frac{V^+ - V^-}{2\Delta r}$$

により実効デュレーションが得られる。

実効デュレーションと同様に、実効コンベクシティはスポットレートの微小変化から以下のように計算される。

$$(5.4) \quad C_{\text{eff}} = \frac{1}{V^0} \frac{V^+ - 2V^0 + V^-}{\Delta r^2}$$

WAL はローンプール内部の個別のローンの残存年数を、その残高で加重して平均したものである。MBS は将来のキャッシュフローの発生額が確定していないため、普通債とは平均残存年数の変動が異なる。WAL は

$$(5.5) \quad \text{WAL} = \frac{1}{A_0} \sum_{t=1}^T CF_t \cdot t$$

により与えられる。

### 5.2 パラメータセンシティブリティの計算方法

パラメータセンシティブリティを以下のように定義する。パラメータセンシティブリティは「パラメータの微小変化幅」に対するリスク指標の変化率ではなく、「パラメータの微小変化率」に対するリスク指標の変化率とする。これは、パラメータごとのセンシティブリティの値の比較を容易にするため、センシティブリティを正規化したものである。スポットレートを  $s$  平行移動し、各スポットレート水準におけるパラメータセンシティブリティを計算する。

$$(5.6) \quad \text{Price: } R_s^V = \left( \frac{\alpha}{V} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \Big|_{\delta=s}, \frac{\eta}{V} \frac{\partial V}{\partial \eta} \Big|_{\delta=s}, \frac{\beta_1}{V} \frac{\partial V}{\partial \beta_1} \Big|_{\delta=s} \right)$$

$$(5.7) \quad \text{Duration: } R_s^D = \left( \frac{\alpha}{D} \frac{\partial D}{\partial \alpha} \Big|_{\delta=s}, \frac{\eta}{D} \frac{\partial D}{\partial \eta} \Big|_{\delta=s}, \frac{\beta_1}{D} \frac{\partial D}{\partial \beta_1} \Big|_{\delta=s} \right)$$

コンベクシティは 0 になることもあるため、 $C$  での除算は行わない。

$$(5.8) \quad \text{Convexity: } R_s^C = \left( \alpha \cdot \frac{\partial C}{\partial \alpha} \Big|_{\delta=s}, \eta \cdot \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\delta=s}, \beta_1 \cdot \frac{\partial C}{\partial \beta_1} \Big|_{\delta=s} \right)$$

$$(5.9) \quad \text{WAL: } R_s^W = \left( \frac{\alpha}{W} \frac{\partial W}{\partial \alpha} \Big|_{\delta=s}, \frac{\eta}{W} \frac{\partial W}{\partial \eta} \Big|_{\delta=s}, \frac{\beta_1}{W} \frac{\partial W}{\partial \beta_1} \Big|_{\delta=s} \right)$$

### 5.3 MBS リスク指標及びパラメータセンシティブリティの計算方法

#### 5.3.1 シミュレーションの前提

分析対象とする MBS は公庫 RMBS 第一回債とする。年限は 35 年(420ヶ月)、利率は 1.75% である。予定元本額推移  $A_t$  は、公庫 RMBS 第一回債の発行時点に公庫から発表されている予定ファクター<sup>11)</sup> の値を用いる。また、シミュレーションの開始時点は公庫 RMBS 第一回債発行直後の 2001 年 4 月とし、金利パスの初期値は 2001 年 3 月末時点の残存期間 1 ヶ月のスポットレートをを用いる。また、シミュレーションの回数は 10,000 回とする。

#### 5.3.2 シミュレーションの方法

モンテカルロ・シミュレーション法では、短期金利の経路を多数発生させ、各パス上における MBS の理論価格およびリスク指標を求める必要がある。このため、まず(3.10)式を  $dt=1/12$  (年)として離散化し、 $dz$  に標準正規乱数を逐次代入してランダムな短期金利経路  $r_t$  を求める。また(4.1)式から 10 年パーイールド  $\psi_t$  を計算する。スポットレートをシフトする方法として、まず(4.1)式から基準となる 1 ヶ月満期のスポットレートのランダムパスを発生し、それをシフトさせる方法を取った。従って(3.10)式において  $r$  が負となることはない。

なお、本研究では季節要因のパラメータセンシティブリティは考慮しない。420ヶ月の長期間で考えると、季節成分は 1 年の期間内におけるキャッシュフローを前後させるだけであり、季節要因の除外は結果に大きな差異を与えないと考えられるためである。同様にメディア効果も考慮しないこととする。メディア効果の大きさとその継続期間は、その原因となる政策・税制等の変更の内容によって異なると考えられるため、3 章で推定したメディア効果がどのようなメディア効果にも常にあてはまるとは限らない。このため、シミュレーションではメディア効果は発生させず、またメディア効果に対するパラメータ  $\phi$  のセンシティブリティも計算しない。

金利水準によるパラメータセンシティブリティの違いを調べるため、シミュレーション第  $n$  回目の短期金利パス  $r^n = \{r_1^n, r_2^n, \dots, r_{420}^n\}$  を  $\delta$  シフトさせた  $\hat{r}^n = \{r_1^n + \delta, r_2^n + \delta, \dots, r_{420}^n + \delta\}$  を短期金利経路として用いる。 $\hat{r}^n$  から 10 年パーイールド  $\psi^n$  を計算し、CPR モデルにおける借換え金利とする。4 章で説明した方法により RMBS からのキャッシュフローを計算するとともに、 $\hat{r}^n$  によりディスカウントファクター  $\hat{D}F^n = \{\hat{d}f_1^n, \hat{d}f_2^n, \dots, \hat{d}f_{420}^n\}$  を求める。これらによりキャッシュフローの割引現在価値の合計を求め、各パス毎の RMBS の理論価格とする。この手続きを多数試行し、平均値をとることにより、RMBS の理論価格、及びリスク指標を求める。なお(5.3)式及び(5.4)式の数値微分によりリスク指標を計算するが、この際に発生させる乱数系列には同じ初期値を与えている。これにより数値微分の値にモンテカルロ法に由来する誤差は含まない。

#### 5.4 MBS の理論価格及びリスク指標及び計算結果

図 4 はスポットレートの水準を  $-0.6\%$  から  $+3.0\%$  までシフトさせた場合の RMBS の理論価格、デュレーション、コンベクシティ、及び WAL である<sup>12)</sup>。

理論価格はシフト幅  $s$  の上昇に対して単調に低下している。理論価格は期前償還があるケースの方が常に高い。 $s = -0.6\%$  の場合は期前償還がないケースと期前償還があるケースの価格

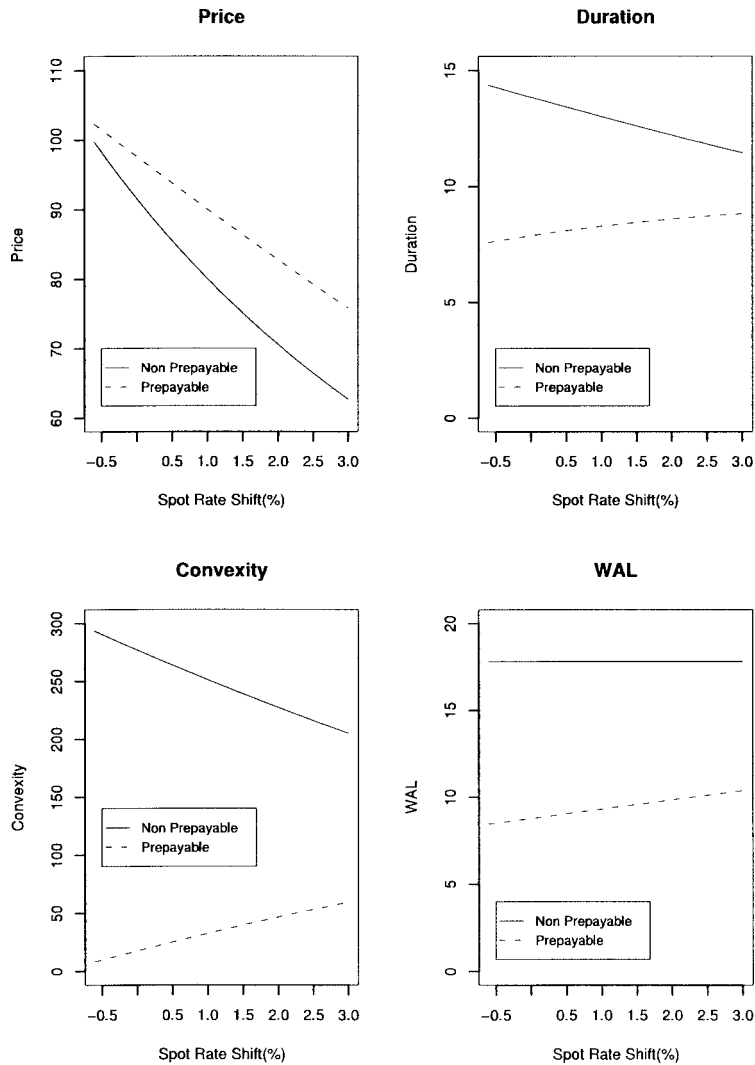


図 4. 理論価格とリスク指標 .

差は小さいが、 $s$  の上昇に従い価格差は大きくなっている。デュレーションの値は期前償還の有無によって水準そのもの、及び  $s$  による変化傾向が異なっている。期前償還があるケースはないケースより常にデュレーションが短く、 $s=0$  では約 7.9 に対し約 13.9 となっている。このようなデュレーションの水準の違いが価格の変化傾向に影響を与えている。期前償還があるケースはない場合に比べてデュレーションが短いため、MBS の金利感応度が低く、価格変化の度合いも小さい。期前償還がないケースでは  $s$  の上昇に対してデュレーションは単調に短期化しているが、逆に期前償還があるケースでは  $s$  の上昇に対して長期化する傾向がある。これは、 $s$  の上昇は借換え金利を高めることから、CPR を低下させ、資金償還が遅くなるためである。コンバクシティの値は期前償還の有無によって水準そのもの及び  $s$  による変化傾向が大きく

異なっている。前述のようにコンベクシティは金利-価格曲線の曲率を表している。図 5 の理論価格のグラフから、期前償還がないケースでは金利-価格曲線の曲率ははっきりしているが、期前償還があるケースでは曲率は明確ではない。この直感的な曲率の違いはコンベクシティの違いとなって現れている。

なお、シフト幅を負値にとるとコンベクシティが負値となることがあるが(ネガティブ・コンベクシティ)、図 4 の結果ではネガティブ・コンベクシティは観測されていない。 $s$  を  $-0.6\%$  よりも小さくすれば、ネガティブ・コンベクシティが現れると思われる。コンベクシティが負になるということは、デューレーションが 0 に近づき、場合によっては負になる可能性を示唆している。このような現象は実際に米国で発生しており、その原因は借換え金利の大幅な低下によって CPR が極端に大きくなり、わずか数年以内に全ての元本が償還されるためである。この現象が特に市場金利低下時に現れることを考慮すると、RMBS は普通債よりも金利低下時の債券価格の上昇度が鈍くなることや、大量に償還された資金の再運用に迫られることなどに注意が必要である。

WAL は期前償還の有無によって異なっている。期前償還がないケースでは WAL は一定である。また、期前償還があるケースでは常に無いケースよりも短く、 $s$  の上昇に伴って長期化する傾向がある。これは  $s$  の上昇に伴い借換え金利が上昇するため、CPR が低くなることにより資金償還が遅くなるためである。

#### 5.5 パラメータセンシティブリティの計算結果

パラメータセンシティブリティの考察においては、CPR 関数のパラメータセンシティブリティを把握しておくことにより示唆が得られると考えられる。なぜなら、CPR の変化は理論価格とリスク指標に大きな影響を与えるからである。RMBS の理論価格及びリスク指標の計算では、それらは金利パスの経路に依存する。このため、CPR モデルの出力値の変化が RMBS の理論価格等の変化をすべて説明するわけではないが、CPR の変動は結果の考察に対して示唆を与えると考えられる。このため、CPR 関数のパラメータセンシティブリティを偏微分により求める。

3 章で推定された CPR モデルから季節変動成分及びメディア効果を除外すると、借換えインセンティブ  $i$ 、時点  $t$  の  $CPRg(i, t)$  は、

$$(5.10) \quad g(i, t) = (\alpha + \eta \min(t, \tau)) \exp(\beta_1 i)$$

となる。

(5.6) 式 ~ (5.9) 式を参考に (5.10) 式から CPR の  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\beta_1$  各々に対するパラメータセンシティブリティを求めると、

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \alpha \frac{\partial g}{\partial \alpha} &= \alpha \exp(\beta_1 i) \\ &= 1.543 \exp(-0.119i) \end{aligned}$$

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \eta \frac{\partial g}{\partial \eta} &= \eta T_t \exp(\beta_1 i) \\ &= 0.115 T_t \exp(-0.119i) \end{aligned}$$

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \beta_1 \frac{\partial g}{\partial \beta_1} &= \beta_1 i (\alpha + \eta T_t) \exp(\beta_1 i) \\ &= -0.119i (1.543 + 0.115 T_t) \exp(-0.119i) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $T_t = \min(t, \tau)$  である。



さて、図5のパラメータセンシティブリティ(以下、単にセンシティブリティと記す)の計算結果を考察する。

#### i) デュレーションのセンシティブリティ

デュレーションは投資判断やリスク・ヘッジの際に重要なリスク指標である。図5からわかるように、デュレーションのセンシティブリティはパラメータによってその変動性が異なっている。 $\eta$ のセンシティブリティの絶対値は大きく、 $s = -0.6\%$ においては $-35.1\%$ にも達するが、 $s$ の上昇に比例して大きく(絶対値は小さく)なる傾向にある。 $\alpha$ のセンシティブリティはシフト幅に対してあまり変化せずどの $s$ においても負である。 $\beta_1$ のセンシティブリティは $s$ に対して単調増加しており、 $s = 3.0$ では $21.8\%$ に達する。

デュレーションに対するセンシティブリティの変動は、資金の償還の速度と関係が深いので、CPRのセンシティブリティから考察することができる(5.11)式(5.12)式より、CPRの $\alpha, \eta$ に対するセンシティブリティは正である。CPRの上昇は資金の償還を早めるため、デュレーションの短期化をもたらす。従って、デュレーションのセンシティブリティは $\alpha, \eta$ ともに常に負となると考えられる。また、グラフからは $\eta$ のセンシティブリティは $\alpha$ の3倍程度となっている。 $\alpha$ と $\eta$ に対するセンシティブリティの違いは $1.543$ の項と $0.115T_t$ の項の違いである。 $T_t$ は $t$ 時点のキャッシュフローの割引現在価値( $CF_t df_t / A_0$ )で重み付けられた $\min(t, \tau)$ の平均値である。 $t$ の平均値はWALに一致することから、これを9年=108ヶ月とし、 $t$ の区間 $[0, 108]$ で $\eta \min(t, \tau)$ を積分すると $4.95$ (年)となる。 $4.95 / 1.54 = 3.2$ であり、簡単な計算により両者の比率を裏付けることができた。

また、図5において $s$ の水準が高くなることにより、デュレーションの $\alpha, \eta$ のセンシティブリティが単調に増加(絶対値は低下)する傾向が観察される。 $s$ は(3.2)式の関係より、 $s$ の上昇によって $i$ も上昇する。 $\exp(-0.119i)$ は $i$ の上昇に対して絶対値が単調減少する。これはCPRを低下させデュレーションの長期化につながるため、デュレーションの $\alpha, \eta$ に対するセンシティブリティが単調に増加(絶対値は減少)するものと考えられる。

これに対して、 $\beta_1$ のセンシティブリティは次のように考えることができる。 $s$ の上昇幅と $i$ の上昇幅は等しい(5.13)式は原点を通る $i$ の単調減少関数である。従って、CPRの $\beta_1$ に対するセンシティブリティは $s$ に対して単調減少する。CPRの低下はデュレーションの長期化に直結することを考えると、デュレーションの $\beta_1$ に対するセンシティブリティは $s$ に対して単調増加すると考えられる。また、 $\beta_1$ に対するセンシティブリティのグラフは原点を通過しているように見えるが、これは(5.13)式が原点を通過するためであると考えられる。

#### ii) 理論価格のセンシティブリティ

理論価格では、図5から $\eta$ ではセンシティブリティが正であり、シフト幅 $s$ が上昇すればするほどセンシティブリティは大きくなる。また、 $\alpha$ でも同様に変化するが、その大きさは $\eta$ のセンシティブリティよりも小さい。また、 $\beta_1$ のセンシティブリティは $s$ の水準によってその傾向が異なっている。 $s \leq 0.2\%$ ではセンシティブリティ値はわずかに正であるが、 $s > 0\%$ では負となり、 $s$ の上昇にともなって低下する傾向がある。

この理由は以下のように説明されると考えられる。まず、図4の理論価格のグラフから明らかのように、市場金利水準 $s$ の上昇は理論価格を押し下げる要因となり、 $s$ が大きくなればなるほど理論価格は低くなる。 $s$ の上昇に対する理論価格の下落率は(5.3)式よりデュレーションで表される。従って、理論価格のパラメータセンシティブリティは概ね $s \cdot (-R_s^D)$ のように振舞うと考えることができる。

#### iii) コンベキシティのセンシティブリティ

コンベキシティでは、 $\alpha, \eta$ に対するセンシティブリティは $s$ の変化に対してほとんど変化しな

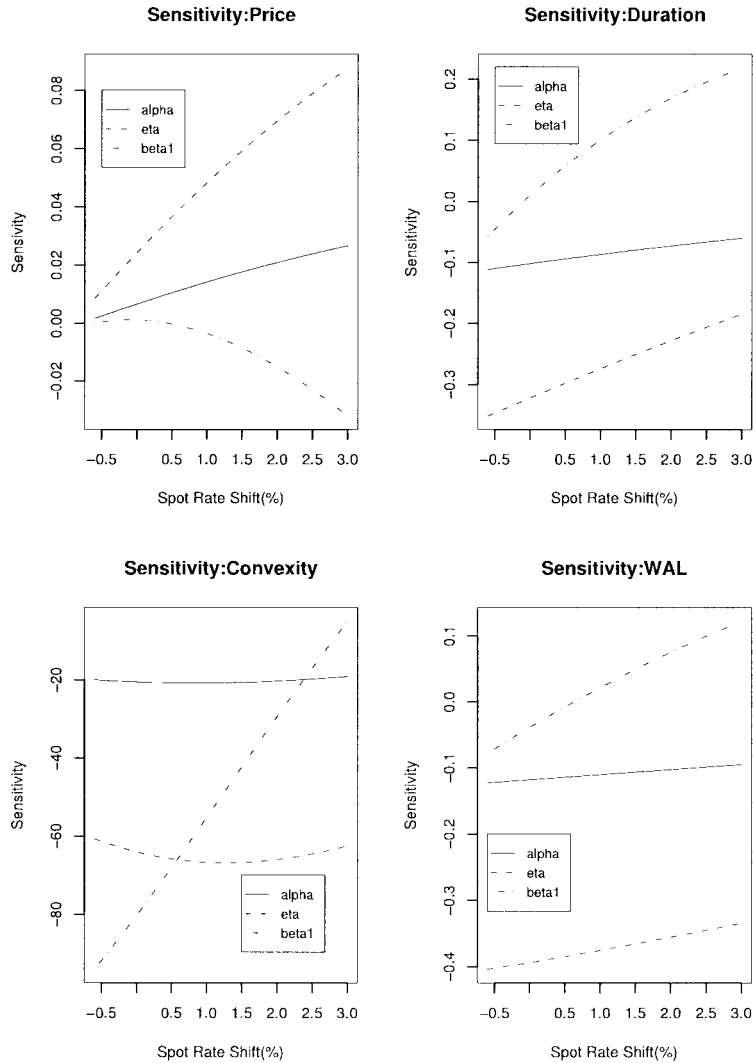


図5. パラメータセンシティビティ.

いが、 $\beta_1$  では単調増加している。 $\alpha$  のセンシティビティは約  $-20$  でほぼ一定であり、 $\eta$  では  $-60$  以下の値でやや下に凸の曲線となっている。これに対し  $\beta_1$  のセンシティビティは  $s = -0.6\%$  で約  $-94.0$  であるが、 $s$  の上昇に伴い上昇(絶対値は低下)しており、 $s = 3.0$  では約  $-4.9$  である。

コンベクシティは利回り-価格曲線の曲率を表すと同時に、金利の変化に対するデュレーションの変化率を表す代理変数でもある。コンベクシティの変化傾向を説明するためには、CPR の  $r$  による偏微分を考慮すればよいと考えられる。

さて、インセンティブの定義より  $i$  と  $s$  の差は一定であるので、 $i$  による偏微分は  $r$  による偏微分と同値である。(5.11)式(5.12)式(5.13)式を各々  $i$  で偏微分し、パラメータに数値を代

入ると以下ようになる．

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha \partial i} &= \alpha \beta_1 \exp(\beta_1 i) \\ (5.14) \qquad \qquad \qquad &= -0.119 \alpha \exp(-0.119i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta \frac{\partial^2 g}{\partial \eta \partial i} &= \beta_1 T_t \eta \exp(\beta_1 i) \\ (5.15) \qquad \qquad \qquad &= -0.119 \eta T_t \exp(-0.119i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{\partial^2 g}{\partial \beta_1 \partial i} &= \beta_1 (\alpha + \eta T_t) (1 + \beta_1 i) \exp(\beta_1 i) \\ (5.16) \qquad \qquad \qquad &= -0.119 (1.543 + 0.115 T_t) (1 - 0.119i) \exp(-0.119i) \end{aligned}$$

(5.14) 式において、 $i$  は概ね数%であるため、 $\exp(-0.119i)$  の変動は小さい．このため、 $\alpha$  に対するセンシティブリティは常に負で  $s$  によらずほぼ一定であると思われる．また(5.15)式では(5.14)式と同じく  $\exp(-0.119i)$  の変動は小さい．このため、 $\eta$  のセンシティブリティは  $s$  によってあまり変動しないものと考えられる． $\alpha$  に対するセンシティブリティと  $\eta$  のセンシティブリティを比較するために(5.14)式と(5.15)の違いをみると、 $\alpha$  の項と  $\eta T_t$  の項の違いがある．デレーションの場合と同様にこれを積分によって求めると、 $t=9$ (年)ではその比率が約 2.7 倍となっている．このため、 $\eta$  に対するセンシティブリティの方が  $\alpha$  に対するセンシティブリティの 3 倍弱大きいと考えられる．

$\beta_1$  のセンシティブリティは、主に  $-(1 - 0.119i)$  の変動による影響を受けるため、 $s$  の上昇に対してほぼ線形に上昇するものと考えられる．

#### iv) WAL のセンシティブリティ

WAL のセンシティブリティはデレーションの場合と傾向が似ている． $\eta$  のセンシティブリティは常に負であるが、 $s$  の上昇により大きく(絶対値は小さく)なる． $\alpha$  のセンシティブリティは絶対値が小さく、 $s$  の変化に対してあまり変化せず常に負である． $\beta_1$  のセンシティブリティは  $s$  の上昇に対してほぼ線形に増加する．

これらの理由はデレーションの場合と同じ理由によるものと考えられる．デレーションとの若干の違いは、キャッシュフロー  $CF_t$  をディスカウントファクター  $df_t$  で割引くが割引かないかの違いによるものと考えられる．

## 6. 結論

Richard and Roll(1989)を参考に CPR モデルを推定し、これを用いて MBS の理論価格とリスク指標のパラメータセンシティブリティをモンテカルロ・シミュレーションにより求めた．この結果、全体としては MBS 経年数に対する CPR の上昇率を示す  $\eta$  のパラメータセンシティブリティ、金利インセンティブに対する感応度を表す  $\beta_1$  のパラメータセンシティブリティが相対的に大きいことがわかった．特に後者は金利水準による変動が大きいため、リスク管理上注意が必要である．投資判断において重要な役割を果たすデレーションのパラメータセンシティブリティも絶対値が大きく、金利水準による変動も大きいことから、統計的 CPR モデルを利用して MBS のリスクを管理する際はこれらのセンシティブリティの変動を考慮することが重要である．

MBS のリスク分析はモデル依存的にならざるを得ない．一般的に金融商品の価格やリスクを評価するモデルでチューニング(調整)の必要がないモデルは無い．時間が経過することにより

新たなデータが追加され、最適なモデルは変化するからである。このため、モデルのパラメータの変化により、MBS の評価結果にどのような影響を与えるかを予め把握しておくことは、理論価格やリスク指標の計算結果を評価する際に重要な情報となる。

例えば借換えが金利負担を軽減することが多くの債務者に知れ渡ることにより、金利インセンティブに対する感応度が上昇することが見込まれるとする。このような場合、事前に金利感応度 ( $\beta_1$ ) に対するパラメータセンシティブリティを調べておけば、リスク評価値(理論価格やデュレーション)がどのように変化するかを推定することができる。また、経年効果(Seasoning)のスピード ( $\eta$ ) が上昇する場合や下降する場合に、MBS ポートフォリオのリスク評価値がどうなるか、など What-if 分析にも役立てることができる。

今後の課題として、このような静態的なパラメータセンシティブリティの利用法を動態的な分析手法へと拡張し、モデルが不安定であることを前提とした MBS ポートフォリオの計量的リスク管理の方法について研究したい。例えば、本研究のように統計的手法により CPR モデルを過去データから推定した場合、パラメータの信頼区間が得られる。これを用いて理論価格やデュレーション等の信頼区間を求めることが可能であると思われる。さらに、パラメータ推定値が一定の確率分布に従っていると考え、これをパラメータセンシティブリティを用いて反映させ、理論価格やデュレーション等の確率分布を考えることも可能ではないかと考えられる。

さらに、本論文ではパラメータセンシティブリティを求めなかった「季節変動効果」及び「メディア効果」についてもセンシティブリティを求めることにより、本論文で推定した CPR モデルのすべてのパラメータセンシティブリティを把握することができる。さらに金利モデルのパラメータについても同様のセンシティブリティを求めることができると考えられる。このため、MBS のリスク評価において用いられるパラメータすべてのセンシティブリティの情報を利用するリスク管理手法の開発が可能であると考えられる。

もしこれらが実現すれば、MBS ポートフォリオのインデックス運用におけるリスク管理がより厳密なものとなる。また、MBS ポートフォリオのアクティブ運用を行う場合でも、リスク管理の厳格化と同時に収益率向上にも貢献することが期待される。多くの市場参加者がモデルの不安定性に対する不安を抱くことなく投資できるようになれば、MBS 市場への参加者の裾野が広がり、MBS 市場が発展することが期待される。

しかしながら、パラメータセンシティブリティがパラメータの変動に対する変動性のすべてを説明できるわけではない。債券の金利変化に対する価格変化率を表すデュレーションに対して、それを補うコンベクシティが存在するように、パラメータセンシティブリティについても同様の指標を用いることが有効かもしれない。さらに注意すべきは、パラメータセンシティブリティ自体もまた誤差を含むことである。今後はパラメータセンシティブリティという有用な情報を、その限界を踏まえつつどのように実務適用していくのかについて、更なる研究を行いたい。

## Notes

- 1) 住宅金融公庫債券の詳細については、住宅金融公庫ホームページから閲覧することが可能である。
- 2) 燃え尽き効果とも呼ばれる。過去に大きな期前償還を経た MBS は、その後再び期前償還が有利な条件下でも、CPR があまり上昇しない現象が観察されているが、これをバーンアウト効果と呼ぶ。
- 3) Public Securities Association (米国証券業協会) の略である。
- 4) 米国では  $\tau = 30$  (ヶ月) が標準的であるが、わが国での実証研究例などを参考に、本研究では  $\tau = 70$  (ヶ月) とした。しかしながら、本研究では、パラメータ推定に用いたデータ

- は 49 ヶ月であり、飽和時点と飽和水準に達していないと考えられる。
- 5) Weighted Average Coupon の略。加重平均金利と訳される。MBS にプールされているローン債権の加重平均金利である。
  - 6) 17 回号は観測値が 12 個しかないため、DECOMP のアルゴリズムではトレンド成分と季節成分の分離ができないため、17 回号は除外した。
  - 7) 債務者の実際の償還期間としては 10 月 1 日から 12 月末までの期間に相当する。
  - 8) 「平成 13 年度税制改正の概要」に「新住宅ローン減税制度は平成 13 年 7 月 1 日から平成 15 年 12 月 31 日まで」と明記されている。この延長に対する議論として平成 15 年 12 月に公表された政府税制調査会「平成 16 年度の税制改正に関する答申」では、「住宅ローン減税については（中略）現行より相当の縮減を行うべきである」との答申がされた。「住宅ローン減税の延長」が明確に示されたのは「平成 16 年度税制改正案」が閣議決定された平成 16 年 1 月 16 日である。
  - 9) Cox et al. (1985) で提案された金利モデルである。なお、“SR” は Chan et al. (1992) が付加したもので、Square Root の頭文字である。
  - 10) MBS の場合は「ローンが期前償還されること」である。
  - 11) 期前償還が無いと仮定した場合の元本残高の推移を表す数値であり、当初元本残高  $A_0$  を 1 とした場合の  $A_t$  である。
  - 12) シフト幅を負値にするとマイナス金利が発生する可能性がある。経済的な観点からの意味づけは困難であるが、ここではあえてこれを無視し、リスク指標とパラメータセンシティビティの傾向を捉えるため、 $-0.6\%$  までのシフト幅を試した。

## 謝 辞

本研究を進めるに当たり、大変貴重なご指導を頂いた統計数理研究所の田村義保教授に深謝いたします。また、有益なご助言を頂戴したレフェリーの方々に感謝いたします。最後に友人として実務的観点からの助言を頂いた東京三菱銀行の菊池省吾氏に謝意を表します。

付表 . CPR モデルの推定結果 .

	Lag	$\alpha$	$\eta$	$\beta_1$	$\beta_2$	$q_1^2$	$q_1^3$	$q_2^3$	$\phi$	AIC
Model 1		3.951 (38.189)							2.308 (5.653)	208.048
Model 2		2.141 (20.694)	0.147 (23.272)						1.637 (4.009)	194.608
Model 3										
	1	1.704 (20.530)	0.119 (23.377)	-0.097 (-9.338)					1.415 (4.232)	196.536
	2	1.501 (20.462)	0.106 (23.433)	-0.151 (-14.631)					1.270 (4.282)	196.427
	3	1.196 (20.362)	0.085 (23.517)	-0.249 (-24.306)					1.030 (4.354)	196.081
	4	1.295 (20.507)	0.091 (23.510)	-0.218 (-21.329)					0.932 (3.817)	196.199
	5	1.274 (20.594)	0.089 (23.496)	-0.228 (-22.367)					0.819 (3.516)	196.171
	6	1.597 (20.691)	0.110 (23.361)	-0.131 (-12.814)					1.059 (3.602)	196.463
Model 4										
	1	2.183 (21.015)	0.147 (23.277)		0.295 (2.286)				1.036 (2.812)	196.309
	2	2.134 (20.646)	0.148 (23.284)		-0.036 (-0.295)				1.724 (4.169)	196.603
	3	2.064 (20.221)	0.150 (23.579)		-0.293 (-2.365)				2.212 (5.032)	196.206
	4	2.037 (20.041)	0.152 (23.951)		-0.355 (-2.647)				1.887 (4.496)	195.924
	5	2.041 (20.007)	0.153 (24.070)		-0.301 (-2.205)				1.625 (4.011)	196.129
	6	2.138 (20.671)	0.148 (23.299)		-0.008 (-0.062)				1.632 (4.001)	196.607
Model 5										
	1	1.432 (20.816)	0.098 (23.471)	-0.182 (-17.551)	0.396 (3.051)				0.693 (2.833)	198.076
	2	1.473 (20.508)	0.103 (23.429)	-0.161 (-15.608)	0.047 (0.378)				1.169 (4.094)	198.420
	3	1.325 (20.118)	0.097 (23.669)	-0.195 (-19.014)	-0.198 (-1.573)				1.388 (4.956)	197.927
	4	1.548 (20.045)	0.115 (23.967)	-0.122 (-12.007)	-0.295 (-2.176)				1.345 (4.302)	197.814
	5	1.462 (20.122)	0.108 (24.006)	-0.152 (-14.966)	-0.220 (-1.593)				1.026 (3.677)	197.968
	6	1.488 (20.977)	0.099 (23.056)	-0.170 (-16.623)	0.102 (0.758)				0.963 (3.584)	198.425

付表 . ( 続き )

	Lag	$\alpha$	$\eta$	$\beta_1$	$\beta_2$	$q_1^2$	$q_1^3$	$q_2^3$	$\phi$	AIC
Model 6										
	1	1.607 (20.240)	0.122 (24.404)	-0.095 (-9.394)	-0.073 (-0.617)	0.680 (-7.841)			1.719 (5.027)	191.241
	2	1.643 (20.189)	0.125 (24.442)	-0.083 (-8.255)	-0.126 (-1.022)	0.682 (-7.767)			1.824 (5.142)	191.177
	3	1.609 (20.377)	0.120 (24.348)	-0.099 (-9.837)	-0.054 (-0.385)	0.688 (-7.577)			1.533 (4.664)	191.242
	4	1.690 (20.531)	0.124 (24.253)	-0.082 (-8.170)	-0.012 (-0.085)	0.687 (-7.620)			1.460 (4.376)	191.338
	5	1.680 (20.845)	0.119 (23.924)	-0.094 (-9.385)	0.132 (0.957)	0.679 (-7.840)			1.387 (4.299)	191.285
	6	1.565 (21.207)	0.106 (23.543)	-0.135 (-13.433)	0.255 (1.947)	0.679 (-7.857)			1.273 (4.325)	190.958
Model 7										
	1	1.556 (20.352)	0.116 (24.345)	-0.113 (-11.160)		0.683 (-7.748)			1.525 (4.753)	189.264
	2	1.543 (20.404)	0.115 (24.302)	-0.119 (-11.720)		0.684 (-7.705)			1.482 (4.699)	189.244 *
	3	1.564 (20.474)	0.116 (24.268)	-0.115 (-11.399)		0.687 (-7.605)			1.423 (4.535)	189.256
	4	1.679 (20.553)	0.123 (24.231)	-0.086 (-8.534)		0.686 (-7.635)			1.442 (4.363)	189.339
	5	1.792 (20.597)	0.131 (24.194)	-0.058 (-5.792)		0.686 (-7.648)			1.519 (4.330)	189.397
	6	1.832 (20.622)	0.133 (24.162)	-0.049 (-4.863)		0.684 (-7.694)			1.558 (4.345)	189.410
Model 8										
	1	1.618 (20.417)	0.120 (24.347)	-0.097 (-9.576)	-0.007 (-0.055)		1.094 (2.456)	0.684 (-8.749)	1.498 (4.575)	193.104
	2	1.612 (20.330)	0.121 (24.392)	-0.096 (-9.477)	-0.077 (-0.619)		1.093 (2.439)	0.685 (-8.737)	1.605 (4.800)	193.025
	3	1.568 (20.473)	0.116 (24.335)	-0.113 (-11.223)	-0.028 (-0.201)		1.084 (2.207)	0.690 (-8.554)	1.369 (4.400)	193.028
	4	1.623 (20.579)	0.119 (24.295)	-0.100 (-10.013)	-0.013 (-0.089)		1.080 (2.109)	0.690 (-8.568)	1.290 (4.121)	193.085
	5	1.629 (20.871)	0.115 (23.988)	-0.108 (-10.760)	0.118 (0.866)		1.087 (2.292)	0.683 (-8.793)	1.237 (4.043)	193.069
	6	1.528 (21.211)	0.104 (23.619)	-0.145 (-14.457)	0.229 (1.754)		1.096 (2.512)	0.682 (-8.837)	1.155 (4.096)	192.814

付表 . ( 続き )

	Lag	$\alpha$	$\eta$	$\beta_1$	$\beta_2$	$q_1^2$	$q_1^3$	$q_2^3$	$\phi$	AIC
Model 9										
	1	1.614 (20.427)	0.120 (24.343)	-0.099 (-9.710)			1.093 (2.440)	0.684 (-8.739)	1.480 (4.547)	191.104
	2	1.555 (20.460)	0.115 (24.318)	-0.116 (-11.484)			1.088 (2.322)	0.686 (-8.691)	1.404 (4.504)	191.048
	3	1.545 (20.522)	0.114 (24.297)	-0.121 (-12.020)			1.083 (2.196)	0.689 (-8.571)	1.315 (4.328)	191.032
	4	1.613 (20.601)	0.118 (24.273)	-0.104 (-10.381)			1.080 (2.116)	0.689 (-8.585)	1.273 (4.107)	191.086
	5	1.725 (20.652)	0.126 (24.230)	-0.076 (-7.575)			1.082 (2.163)	0.689 (-8.595)	1.337 (4.061)	191.161
	6	1.747 (20.692)	0.126 (24.186)	-0.071 (-7.123)			1.083 (2.174)	0.687 (-8.657)	1.349 (4.057)	191.172

## 参 考 文 献

- Brennan, M. and Schwartz, E. (1979). A continuous time approach to the pricing of bonds, *Journal of Banking and Finance*, **3**, 133–155.
- Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A. and Sanders, A. B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-time interest rate, *Journal of Finance*, **47**, 1209–1227.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rate, *Econometrica*, **53**, 385–407.
- 乾 孝治, 室町幸雄 (2000). 『金融モデルにおける推定と最適化』, 朝倉書店, 東京.
- Kariya, T. and Kobayashi, M. (2000). Pricing mortgage-backed securities, *Asia Pacific Financial Markets*, **7**, 189–204.
- Nakamura, N. (2001). Valuation of mortgage-backed securities based upon a structural approach, *Asia Pacific Financial Markets*, **8**, 259–289.
- Richard, S. F. and Roll, R. (1989). Prepayment on fixed-rate mortgage-backed securities, *Journal of Portfolio Management*, Spring 1989, 73–78.
- Schwartz, Eduardo S. and Torous, Watter N. (1989). Prepayment and the valuation of mortgage-backed securities, *Journal of Finance*, **44**, 375–392.
- Stanton, R. (1995). Rational prepayment and the valuation of mortgage-backed securities, *The Review of Financial Studies*, **8**, 677–708.
- Sugimura, T. (2002). A prepayment model for Japanese mortgage loan market: Prepayment-type-specific parametric model approach, *Asia Pacific Financial Markets*, **9**, 305–335.
- Tuckman, B. (2002). *Fixed Income Securities*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- 山崎 輝 (2005). 住宅ローン債権担保証券のプライシング手法について—期限前償還リスクを持つ金融商品の価格の導出, *金融研究*, **24**(2), 57–113.



## Analysis of Parameter Sensitivity of a CPR Model in MBS Evaluation

Jun Kataoka

The Graduate University for Advanced Studies

We estimate a CPR (Conditional Prepayment Ratio) model of RMBS (Residential Mortgage-Backed Securities) by using real data as Minimum AIC estimates, referring to Richard and Roll (1989). Theoretical prices and risk indices of RMBS, such as duration, convexity and WAL, were calculated with Monte Carlo simulation. Finally, the parameter sensitivities of prices and risk indices were estimated. It was shown that the parameter sensitivity varies according to market interest rate change. This result is important in risk analysis of RMBS. Theoretical Price and risk indices of MBS greatly depend on the CPR model. Generally, there is no model that does not need tuning. Because, as time passes, new information is added, the optimum model changes. If the model parameters are unstable, risk indices of the MBS estimated using the model may be unstable, too. Thus it is useful to know the parameter sensitivity of risk indices beforehand. This makes possible to know how much the risk indices change when parameter changes are anticipated. It can also make the risk management stricter grasping the parameter sensitivity ahead. It is especially operative for MBS, and adequate use of parameter sensitivity helps sound growth of the MBS market.