統計数理(2009)
第 57 巻 第 1 号 39–65

特集「確率過程の統計解析」
[総合報告]

高頻度データと時間変更

林 高樹†

(受付 2008 年 8 月 21 日;改訂 2008 年 11 月 14 日)

要　旨

確率論における重要な技法である時間変更は，収益率の非正規性や，ボラティリティのクラスタリングや確率的変動，価格のジャンプ，取引間隔の非等間隔性など，金融証券価格の時系列データに特有な現象を表現可能な柔軟なモデリングの技法でもある．本稿では，近年研究の盛んな高頻度データ分析における，時間変更を利用したモデリング事例を紹介する．

キーワード： 高頻度データ，時間変更，セミマルチンゲール，ビジネス時間．

1. はじめに

本稿は，高頻度データ，すなわち，一日内金融証券価格時系列データに対するモデリングのアプローチのうち，特に，時間変更(time change)と呼ばれる手法を用いた事例を紹介する．時間変更を用いるモデルとは，二つのインデックス集合 $\mathbb{T},\mathbb{S}\subset\overline{\mathbb{R}}_+$ に対して，データを生成する(“実時間” $t\in\mathbb{T}$ とともに動く)確率過程 $Y=(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ が，(t とは別の時間軸 $s\in\mathbb{S}$ で動く)別の確率過程 $X=(X_s)_{s\in\mathbb{S}}$ と増加過程 $\tau=(\tau_t)_{t\in\mathbb{T}}$ とによって，

$$Y_t=(X\circ\tau)(t)=X_{\tau_t} \tag{1.1}$$

と表されるモデルを指す．この時，$\mathbb{T}\ni t\longmapsto\tau_t=:s\in\mathbb{S}$ が，実時間 t から別の時間 s への“時間軸”の変更を行う関数である．**時間変更**(time change)とは，この関数 τ か，τ による X から Y への変換操作を指す．τ がランダムである時，特に**確率的時間変更**(stochastic/random time change)と呼ばれることもある．Y を，時間変更 τ による確率過程 X の**時間変更済み**(time-changed)確率過程と呼ぶ．実用上は，Y が(離散時点で)観測可能，X と τ は観測不能なケースを想定することが多い．本稿では，$\mathbb{T},\mathbb{S}$ が連続集合の場合において，Y が離散時点，しかも，短時間の間に高頻度で観測される事例を中心に考える．

時間変更は，確率解析はもとより確率過程に対する統計的推測などの理論研究分野において重要な技法であるが，一方で，その金融データへの応用は，証券収益率分布(日次以上)のファットテール性を説明するモデリングの手法の一つとして 60 年代には提案されていた．時間変更は，収益率の非正規性や，取引間隔の非等間隔性，価格のジャンプやボラティリティの確率的変動などの証券価格時系列データの特性を表現可能な，柔軟かつ強力なモデリングの手法である．時間変更を用いることによって，複雑な市場の現象を，解析的，数値計算的に比較的少ないコストで表現できる可能性もあることから，派生証券の評価などの金融工学への応用研究も盛んである．高頻度データの入手が容易となった今日，金融市場のモデリングへの時間変更の

† 慶應義塾大学大学院 経営管理研究科：〒223–8526 神奈川県横浜市港北区日吉 4–1–1 協生館；takaki@kbs.keio.ac.jp

応用可能性がさらに広がっている．

なお，本稿は，モデリング事例のサーベイを目的としていることから，数学的厳密性よりも，説明の平易性に力点を置く．また，一度に複数の具体例を紹介するという性格上，表記方法に一貫性が欠けたり，説明に冗長な部分が生じる可能性がある．

2. 時間変更に関する基本的性質

2.1 時間変更とは

最初に時間変更に関する基本的性質を整理する．文献においては，時間変更の定義や構成方法は必ずしも一つではないが，本稿では以下の条件を満たす確率変数の族を時間変更と考えることから出発することにする．なお，時間集合は実用上最も重要な $\mathbb{T},\mathbb{S}=\mathbb{R}_+$ であるケースを念頭におくが，議論の過程で，(一時的に) $\overline{\mathbb{R}}_+$ に拡張したりすることがある．次節以降においては，文脈に応じて適宜 $\mathbb{T},\mathbb{S}$ を設定してよい．

特に断らない場合には，確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ と，通常の条件を満たすフィルトレーションである $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ が与えられているものとする．

時間変更 τ の最も自然かつ適当と考えられるクラスは次の通りである．

(A1) $\mathbb{R}_+\ni t\longmapsto\tau_t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ が，初期値が有限の非負値で右連続かつ単調非減少パスを持ち (w.p.1)，各時点 u において，τ_u が $(\mathcal{F}_t)$-停止時刻となるような確率変数 τ_u の全体の集合．

(A1) に加えて，実用性の観点から以下の追加条件を加えることが多い．すなわち，

(A2) (有限性) 各時点 $u<\infty$ において，$\tau_u<\infty$ (w.p.1)；

(A3) (非有界性) $\tau_{\infty-}=\lim_{u\uparrow\infty}\tau_u=\infty$ (w.p.1)．

(A4) (初期条件) $\tau_0=0$.

すなわち，(A2) は，いかなる有限時点 u においても新しい“時計”での時点 τ_u が“爆発”しない，(A3) はその時計が有限の値に収束しない (止まらない) という条件である．(A4) は，実時間 $t=0$ に対応する新時間軸の開始時刻を定めるためのもので，本質的ではない．さらに，ケース・バイ・ケースで，τ に単調増加性，連続性，あるいは微分可能性が付与されたりもする．

また，時間変更 τ を構築するために，直接に τ を定める方法ではなく，次のような間接的方法が行われることも多い (例，Kallenberg, 2002, p. 124, Proposition 7.9)．

(B1) 初期値が有限の非負値で単調非減少かつ右連続なパスを持つ，$(\mathcal{F}_u)$ に適合した確率過程 $\phi=(\phi_t)$，$\phi_t:\mathbb{R}_+\times\Omega\to\overline{\mathbb{R}}_+$，に対して，

$$\tau_u:=\inf\{t>0;\phi_t>u\},\quad u\in\mathbb{R}_+. \tag{2.1}$$

(2.1) によって定義された確率変数 τ_u は，各時点 u において $(\mathcal{F}_t)$-停止時刻であり，関数 $u\mapsto\tau_u$ もまた，(確率 1 で) 右連続な非減少関数であることから，(A1) の要件を満たし，こうして作られた τ_u を集めた族 $\tau=(\tau_u)$ は，時間変更に他ならない (慣習に従い，$\inf\varnothing=\infty$ とする)．また，

(B2) $\phi_t<\infty$ (w.p.1), $\forall t<\infty$;

(B3) $\phi_{\infty-}=\infty$ (w.p.1),

なる追加条件も自然である．(2.1) により，τ のパスが ϕ のパスの右連続逆関数であることから，パスごとに，(B2) + (B3) $\Longrightarrow$ (A2) + (A3), (B2)$^{\mathrm{c}}$+ (B3) $\Longrightarrow$ (A2) + (A3)$^{\mathrm{c}}$, (B2) + (B3)$^{\mathrm{c}}$ $\Longrightarrow$ (A2)$^{\mathrm{c}}$+ (A3) は明らかである．ここで，(B2)$^{\mathrm{c}}$ は $\phi_t=\infty,\exists t<\infty$，(B3)$^{\mathrm{c}}$ は $\phi_{\infty-}<\infty$ の意

味である（ともに，正の確率で）．実用性の観点からは，時間変更 τ の有限性条件（A2）が重要であるので，（B3）を課すか，さらに，新しい時計の“非停止性”条件（A3）をも追加的に付与するために，（B2）も加えることが多い．

なお，本質的ではないが，ϕ_0 の初期条件として，簡便のため，

（B4） $\phi_0 = 0$,

とおくことも多い．さらに，状況に応じて，（B1）における ϕ のパスの単調非減少性，右連続性の条件を強めることもある：

（B5） (i) ϕ は連続；(ii) ϕ は単調増加.

（2.1）に従えば，ϕ のパスの連続性や単調増加性により，τ のパスに関する（$\tau_u < \infty$ となる u の範囲において）次の性質が導かれる： まず，（B5）(i, ii) を満たせば，τ のパスも連続かつ単調増加となり，$\tau = \phi^{-1}$ である．この時，（B4）$\Longrightarrow$（A4）も成り立つ．次に，ϕ のパスが（B5）(i) のみを満たせば，τ のパスは（右連続かつ）単調増加となる．この時，（B4）$\Longrightarrow$（A4）もやはり成り立つ．一方，ϕ のパスが（B5）(ii) のみを満たせば，τ のパスは連続（かつ単調非減少）となる．ただし，（B4）$\Longrightarrow$（A4）が成り立つとは限らない．なお，ここで要約した τ に関するパスの性質が $\mathbb{R}_+$ 上で成立するためには，τ が有限時間で“爆発”してはならず（$\tau_u < \infty$，$\forall u \in \mathbb{R}_+$），したがって先述の議論により，（B5）に加えて（B3）を追加的に付与する必要がある．

参考までに，（B5）の追加条件によって，新時間軸上に生成されるフィルトレーションの大きさがどうなるかを述べたのが次の結果である（cf. Kallenberg, 2002, p. 124, Proposition 7.9）．

定理 2.1. （B1）の時間変更 $\tau = (\tau_u)$ を介して生成されたフィルトレーション $(\mathcal{G}_u := \mathcal{F}_{\tau_u}, u \geq 0)$ は右連続である．さらに，ϕ が連続の時，σ を任意の $(\mathcal{F}_t)$-停止時刻とすると，ϕ_σ は $(\mathcal{G}_u)$-停止時刻であり，$\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{G}_{\phi_\sigma}$ となる．さらにもし ϕ が単調増加であれば，$\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{G}_{\phi_\sigma}$ が成立する．この時，特に，全ての t に対して $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_{\phi_t}$ が成立する．

すなわち，（B5）(i, ii) のとおり，ϕ が連続かつ単調増加の場合，時間変更による“情報”のロスなく，一方の時間軸から他方の時間軸へと変換可能である．特に，この場合には，ϕ と τ の役割を完全に入れ替え可能であるから，実際はどちらを時間変更と呼んでも構わない[1]．

証券価格を表す確率過程として，最も大事なクラスがセミマルチンゲール過程である．いま，有限時間変更 τ（（A1）+（A2））による セミマルチンゲール X の時間変更に関して，次の定理が成り立つ（cf. Kallenberg, 2002, p. 344, Theorem 17.24）．以下において，確率過程 X が“τ-連続である”とは，X が $[0, \infty)$ において a.s. 連続で，全ての $[\tau_{s-}, \tau_s], s \geq 0$, において一定であることを指す（$\tau_{0-} = X_{0-} = 0$ と書く）．

定理 2.2. τ を任意の有限時間変更，$(\mathcal{G}_u := \mathcal{F}_{\tau_u}, u \geq 0)$ を τ を介して生成されたフィルトレーション，$X = M + A$ を τ-連続な $(\mathcal{F}_t)$-セミマルチンゲールとする．この時，時間変更 $X \circ \tau$ は連続な $(\mathcal{G}_u)$-セミマルチンゲールで，“正準分解”（canonical decomposition）$X \circ \tau = M \circ \tau + A \circ \tau$ を持ち，また，その 2 次変動は $[X \circ \tau] = [X] \circ \tau$，a.s. となる．さらにもし，$V$ が X に関して可積分な確率過程であれば，$V \circ \tau$ もまた $X \circ \tau$ に対して可積分な確率過程となり，

$$(V \circ \tau) \cdot (X \circ \tau) = (V \cdot X) \circ \tau, \quad \text{a.s.}$$

が成立する．

なお, 時間変更を“時間変形”（time deformation）と呼ぶ研究者もいる（例, Stock, 1988; Ghysels and Joanna, 1994; Barndorff-Nielsen and Shephard, 2006）．

2.2 マルチンゲールの表現定理

時間変更 τ や ϕ をうまく選ぶことにより，マルチンゲールを新しい時間軸上を動くブラウン運動として表現可能なことが知られている．

周知のとおり，マルチンゲールは，直感的に述べれば，無リスクにて収益を得ることのない“公正”な市場における証券価格を表すモデルであり，数理ファイナンス・金融工学において最も重要な確率過程のクラスである．確率論におけるマルチンゲールの重要性は言を待たないが，このうち，連続(局所)マルチンゲールが時間変更済みのブラウン運動(time-changed Brownian motion)として表現できるという事実は，金融モデルの構築上は勿論のこと，解析的計算や数値計算，シミュレーションなどの応用上の利便性からも大変重要である．

$M=(M_t,\mathcal{F}_t,0\leq t<\infty)$ を $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の連続局所マルチンゲール(continuous local martingale)で，$M_0=0$，$\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t=\infty$,a.s. とする．いま，$\phi_t:=\langle M\rangle_t$ とセットすると次のようなマルチンゲールの表現定理が得られる(cf. Karatzas and Shreve, 1991, p. 174, Theorem 3.4.6)．

定理 2.3. (Dambis-Dubins-Schwarz) 時間変更を $\tau_u:=\inf\left\{t>0:\langle M\rangle_t>u\right\}$，$u\geq 0$，によって定義すると，$M$ に対して τ による時間変更を施した過程

$$B_u:=M_{\tau_u},\qquad \mathcal{G}_u:=\mathcal{F}_{\tau_u},\qquad 0\leq u<\infty$$

は $(\mathcal{G}_u)$-ブラウン運動となる．特に，フィルトレーション $(\mathcal{G}_u)$ は通常の条件を満たし，a.s. に

$$M_t=B_{\langle M\rangle_t},\qquad 0\leq t<\infty \tag{2.2}$$

が成立する．

なお，$P\left[\langle M\rangle_\infty<\infty\right]>0$ のケースにおいては，$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を拡張することにより(2.2)を成立させるようなブラウン運動を定義することができる．詳細は，例えば，Karatzas and Shreve (1991), Remark 3.4.1, Problem 3.4.7 を見よ．さらに，上記マルチンゲール表現定理の多変量への拡張は，Knight (1971)によって行われた(cf. Karatzas and Shreve, 1991, p. 179, Theorem 3.4.13)．

一方，セミマルチンゲールと時間変更済みブラウン運動との(分布の意味での)等価性は，Monroe (1978)によって示された．

定理 2.4. (Monroe, 1978, Theorem 2) 任意のセミマルチンゲール X_t に対して，(別の)ある確率空間上にフィルトレーション $(\mathcal{G}_u)$，ブラウン運動 $(W_u,(\mathcal{G}_u),0\leq u<\infty)$，および $(\mathcal{G}_u)$-停止時刻 τ_t からなる時間変更 $\tau=(\tau_t)$ が存在して，

$$(X_t)\stackrel{\mathcal{L}}{=}(W_{\tau_t})$$

が成立する．

すなわち，セミマルチンゲール X は，ある時間変更 τ によってブラウン運動 W に“埋め込む”ことができる[2]．ただし，定理 2.4 の 2.3 との違いは，ここでの τ や W は一般に X と同じ確率空間上で構成されるものではないこと，等号は分布の意味で成り立つことであり確率 1 (a.s.)の意味ではないことである．

ファイナンス理論によれば，無裁定条件の下では証券価格 X は，セミマルチンゲールでなければならない(Delbaen and Schachermayer, 1994)．この本質的性質に照らして見ると，Monroe (1978)による上記定理は，ジャンプ付のセミマルチンゲール過程さえも ブラウン運動を適当な時間変更過程によって時間変更したものとして表現することの可能性を与えるものであり，理論上，応用上ともに大変重要な定理である．5.1 節を見よ．

2.3 確率微分方程式の解法

ファイナンスにおいては，証券価格のダイナミックスが確率微分方程式によって記述されることも多い．Ikeda and Watanabe (1981)，IV 章において，確率微分方程式の一つの解法として，時間変更を用いる方法を述べている．ここでは，その一つを紹介する．

定理 2.5.（Ikeda and Watanabe, 1981，IV.4.2，例 4.2）関数 $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上で Borel 可測な有界正関数を $a(t,x)$ で非退化 $(a(t,x)\geq c>0)$ とする．時間斉次的な (time-homogeneous) 確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dW_t$$

の解は

$$X_t = X_0 + B_{\phi_t^{-1}}$$

と表せる．ここで，B はブラウン運動 $(B_0=0)$，X_0 は $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数である．ϕ_t は再帰式

$$\phi_t = \int_0^t a\left(X_0 + B_s\right)^{-2} ds$$

によって定義される関数である．

拡散係数が $a(t,x)$ のケースに関しては同文献 IV.4.2 の例 4.3 を参照されたい．なお，ドリフトが確率微分方程式に存在するケースに関しては，Girsanov 変換によって対応することが可能である (同 IV.4.1)．

2.4 レヴィ過程と劣後化

レヴィ過程とは，独立かつ定常な増分を持ち，$[0,\infty)$ において右連続で $(0,\infty)$ において左極限を有するパスを持つ確率過程である．**“劣後過程”** (subordinator) とは，単調非減少 (a.s.) の (1 次元) レヴィ過程を言う．時間変更は，劣後過程の最も重要な応用先である．次の定理が本質的である (例，Applebaum, 2004, p. 53, Theorem 1.3.25)．

定理 2.6. 任意のレヴィ過程 X と，それと同一の確率空間上にある，X とは独立な劣後過程 τ とによって，新たな確率過程 Y を

$$Y_t = X\left(\tau(t)\right), \qquad t\geq 0,$$

によって定義する．この時，Y もまたレヴィ過程となる．

この設定における時間変更を，特に **“劣後化”** (subordination) と呼ぶ [3]．また，$\tau=(\tau_t)$ は **“指揮過程”** (directing process) と呼ばれることもある (Feller, 1971, p. 347)．“Subordination” は，Bochner によって 1949 年に導入された．彼のアプローチは Bochner (1955) にまとめられている．ファイナンス分野においては，Mandelbrot and Taylor (1967) によってはじめて応用された．(レヴィ過程の文脈でない) より一般の時間変更よりもファイナンスへの応用の歴史は古いと思われる．

劣後化は，狭義には時間変更の特殊なケースであるが，用語自体はより一般の (X と τ が互いに独立なレヴィ過程でない) ケースにも用いられることもある (例，Geman and Ané, 1996; Conley et al., 1997)．

2.5 金融時系列データのモデリングにおける時間変更

さて，1 節でも述べたように，時間変更を利用したモデリングにおいては，観測される時系列データが，$Y_t = X(\tau_t)$ なるデータ生成システムから (離散時点) サンプリングされるという立場を取ることも多い．当然ながら，もし観測されるのが左辺のみ (しかも離散時点で) であれ

ば，この等式を満たすような X と τ の選択には無数の組合せがあろう．特殊なケースを除いて Y の観測データから X と τ を同時に特定することは出来ない(cf. Winkel, 2001)．特に，時間軸のスケールの取り方によっても，X が一意に定まらないという“エイリアス問題”(aliasing problem)にも直面する可能性がある(cf. Duffie and Glynn, 2004)．

上述のように，時間変更を利用したモデリングに際しては，ϕ を指定する方法と，最初から直接 τ を指定する方法とがある．いずれにせよ，ここでは，時間変更 τ のモデル化のアプローチを，三つに整理して考える．(a)経済学やファイナンス理論的な考察に基づいて(能動的に)モデル化する立場，(b)Y の特性の時間的非均一性(非斉時性) — 特に，ボラティリティなどの変動特性の時系列変動 — を“平準化”する観点から(受動的に)モデル化を行う立場，(c)解析的ないしは数値計算上の容易性からモデルを決める立場である．

(a)は，特に，取引回数や取引枚数などの観測可能な外生的変数の候補群を選び，その中から説明力の最も高い変数を選択し(実際は観測不能な変数の)“代理変数”(proxy)と見なすアプローチも含む．(b)は，先のマルチンゲールの表現定理やレヴィ過程に対する劣後化がそうであるように，$s=\tau_t$ によって定義される新しい時間軸上において，(観測不能な過程)X_s が時間的均一性を有するような確率過程となるように τ を決めるものであり，いわばデータ駆動的な立場であると言える．(c)は，派生証券の価格付けや統計的推測などの応用に際しての利便性によってモデルを選ぶものであり，正の増加レヴィ過程である劣後過程の中から，計算の容易なものを選択するなどはその典型である．以上の分類は，もとより絶対的なものではなく，目的に応じて，(a)–(c)を混合したアプローチも考えられる．当然ながら，分析の目的によっては，τ や ϕ の関数形そのものに関心を持つケースと持たないケースがある．大雑把に言って，次の第 3 節は(a)のケース，第 4 節は(b)のケース，第 5 節は(c)のケースをそれぞれ対応させている．

一方，潜在過程 X に関しては，ブラウン運動(レヴィ過程の特別な場合でもある)が最も基本的で重要なケースである．新時間軸 s において正規性が得られることから，解析する上でも数値計算の上でも大変に便利である．形式上は，X としてより一般の確率過程を仮定してもよいが，時間変更のそもそもの動機から考えれば，時間的均質性を備えたもの，特にレヴィ過程のクラスが，モデルの簡易性，適用性から望ましいと考えられる．また，X と τ との関係に関しては，独立なケースが出発点として重要ではあるが，金融時系列の記述を考えた場合，独立でないケースへの対応も必要である．この点は，5.1 節でも触れる．

マルチンゲールの表現定理 2.3 や 2.4 に照らせば，ブラウン運動の時間変更によって証券価格の時系列データを表現するのは，極めて自然であることは先述の通りである．

3. 収益率の非正規性と取引量

本節では，証券収益率の周辺分布のファットテール性を，時間変更によって表現する研究について述べる．次節以降とは表裏一体の関係にあるが，次節以降が収益率系列の時系列的特性 — 変動性の一日内季節性やジャンプなど — に焦点を置くのに対し，本節は収益率分布の形状に焦点を当てる研究である．ファットテール性を表現するための時間変更に利用可能な，市場にて観察可能な外部変数の発見や選択に関心がある．その文脈において，最も自然な時間変更は，“ランダム”に発生する取引(特に，ティック)毎に時計の針が進むものであろう．本節で紹介するアプローチは，このような取引情報によって時間変更を行うものである．

Mandelbrot (1963)は，収益率分布のファットテール性を安定パレート分布に当てはめた．Mandelbrot and Taylor (1967), Clark (1973)は，正規性からの乖離を取引量(ボリューム)の変動性に関連付けることを提案し，ファイナンスの分野において初めて，劣後過程の利用を行っ

た．Ané and Geman (2000) は，Mandelbrot and Taylor (1967), Clark (1973) のアプローチを，高頻度データを利用したモデリングの観点から拡張した．本節では，これらの研究について紹介する．

3.1 Mandelbrot and Taylor (1967) & Clark (1973)：安定分布と劣後化

Mandelbrot (1963) は，一定間隔で計測された対数株価変化の列は，近似的に独立で安定パレート分布 (stable Paretian) を持つと主張した．ここで，(α-) 安定分布は，安定指数 α が $1<\alpha<2$ の時，有限の平均と無限の分散を持つ，安定パレート分布となることを思いだそう．なお，安定分布，安定過程，安定レヴィ過程などの概説に関しては，例えば，Shiryaev (1999), Ch. III, を参照せよ．

Mandelbrot and Taylor (1967) は，Mandelbrot (1963) の指摘した収益率分布の安定パレート則を，Brochner の劣後化の概念を導入することによって，ブラウン運動と関連付けられることを指摘した．彼らの議論を以下に要約する．

いま，$X=(X_s)_{0\le s<\infty}$ を平均ゼロ，ボラティリティ σ のブラウン運動 (すなわち，$X_s=\sigma W_s$) とする．この時，X は，$\alpha=2$ の安定レヴィ過程であり，特性関数は

$$\varphi_{X(s)}(\xi)=\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\sigma^2 s\right)$$

である．一方，τ を正の α-安定劣後過程 (stable subordinator) で，$0<\alpha<1$ であるとする．すなわち 特性関数

$$\varphi_{\tau(t)}(\eta)=\exp\left[-\gamma t|\eta|^\alpha\left\{1+i\,\mathrm{sgn}(\eta)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\}\right],$$

を持つ．X と τ は独立であるとする．

いま，劣後化によって確率過程 $Y=(Y_t)_{0\le t<\infty}$ を定義する：

$$Y(t)=(X\circ\tau)(t),\qquad t\ge 0.$$

すると，Y の特性関数は，

$$\varphi_{Y(t)}(\xi)=EE\left[\exp\{i\xi X(\tau(t))\}|\tau(t)\right]=E\varphi_{X(\tau(t))}(\xi)=E\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\xi^2\sigma^2\tau(t)\right\}\right].$$

これより，

$$\begin{aligned}\varphi_{Y(t)}(\xi)&=\varphi_{\tau(t)}\left(\frac{1}{2}i\xi^2\sigma^2\right)\\&=\exp\left\{-\gamma\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^\alpha t|\xi|^{2\alpha}\left(1-\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right\}=\exp\left(-\widehat{\gamma}t|\xi|^{2\alpha}\right),\end{aligned}$$

となる．ただし，$\widehat{\gamma}=\gamma\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^\alpha\left(1-\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)$ とおいた．最後のステップは，特性関数の引数 (実数) への複素数の形式的代入を行ったものであるが，この操作の妥当性は簡単にチェックされる．よって，Y は，安定指数が $2\alpha(<2)$ の対称な安定レヴィ過程であることが示された．すなわち，収益率分布のパレート則が得られた．

Mandelbrot and Taylor (1967) は，物理時間軸上の株式価格過程 $Y=(Y_t)_{0\le t<\infty}$ に対して，$X=(X_s)_{0\le s<\infty}$ を取引の“ボリューム”で測定される時間軸上の株式価格と解釈した．一方，τ_t は，物理時間 t までの累積“ボリューム”または取引件数と考えた．

一般に，X と τ が，ともに，(狭義の) 安定レヴィ過程であり，それぞれが安定指数 $\alpha_1\le 2$, $\alpha_2<1$ を持つとすると，劣後化によって得られる $X(\tau(t))$ は安定指数 $\alpha=\alpha_1\alpha_2$ を持つ安定レヴィ過程となることが知られている (Feller, 1971, p. 348)．

Clark (1973) は，有限な分散を持つ安定分布である正規分布 ($a=2$) を価格 X の増分に仮定し，一方 $\tau(t)$ は (安定レヴィ過程ではないが) 対数正規過程であるような (X と τ とは互いに独立) “対数正規-正規” モデルを取り上げ，取引の “変遷スピード” (speed of evolution) を表す τ 過程が時点 t までの累積取引量 (volume) を表すという仮説の妥当性を日次データを使って検証した [4].

3.2　Ané and Geman (2000)：市場活動時間と取引件数

Geman and Ané (1996), Ané and Geman (2000) は，Clark (1973), Mandelbrot and Taylor (1967) がパイオニアとなった時間変更による非正規型収益率分布を持つ確率過程のモデリング方法を，高頻度データの文脈で進展させた．特に，時間変更 τ に対する制約をはずすことによって，劣後化の方法ではないより一般の確率的時間変更を，しかも τ の確率分布に仮定を置かずに行う方法を考案した．さらに，高頻度データの実証分析により，(取引枚数ではなく) 取引件数が “ビジネス時間” τ を定めることを指摘した.

いま，証券の対数価格が活動時間 s 軸上で，正規拡散過程 (ドリフト μ，ボラティリティ σ のブラウン運動)

$$dX_s = \mu ds + \sigma dW_s, \qquad 0 \le s \le T \tag{3.1}$$

に従って変動しているとする．μ, σ は定数である．勿論，連続のパス $\left(X_s, 0 \in \mathbb{R}^+\right)$ は観測することはできないという意味で，潜在的 (latent) な確率過程である．(簡便のため) 観測は，暦時間軸上において，$0, \Delta, 2\Delta, \ldots, i\Delta, \ldots,$ と離散的に幅 Δ (>0) で等間隔に行われるとする．これらの観測時点の，活動時間軸上の対応時点を，便宜上，$0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_i < \cdots$ と書くことにする.

いま，活動時間 s と暦時間 t とを対応させる写像を $s = \tau(t)$ と書くとすると，離散観測点 $(T_i, i = 0, 1, \ldots)$ に対して，$T_i \equiv \tau(i\Delta)$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ の関係が成り立つから，$\tau(t)$ を階段型の増加関数

$$\tau(t) \equiv T_{\lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor}, \qquad t \ge 0$$

と見なして話を進めても差し支えない (“previous-tick interpolation” と呼ばれる) [5].

すると，任意の暦時点 $t \ge 0$ において観測される対数価格は $X_{\tau(t)} \equiv (X \circ \tau)(t) =: Y_t$ と表されるから，同時点における (暦時間軸における) 長さ Δ の一期間対数収益率は,

$$\Delta Y_t = X_{\tau(t)} - X_{\tau(t-\Delta)} = X_{T_{\lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor}} - X_{T_{\lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor - 1}}$$

である．また，これに対応する (活動時間軸上での) 観測区間幅を $\Delta\tau(t) := \tau(t) - \tau(t-\Delta)$ と書くことにする．X は正規拡散過程であるから，(T_i) がモデル (3.1) の定義されているフィルター付き確率空間上において，停止時刻列であるならば，ドリフト付ブラウン運動 $(X_s, s \ge 0)$ の強マルコフ性によって,

$$\Delta Y_t = X_{\Delta\tau(t)}$$

が成立する.

したがって，Clark (1973) が仮定しているように，さらにもし，X と τ とが独立であれば,

$$P\left[\Delta Y_t \in dy \,|\, \Delta\tau(t) = u\right] = P\left[X_u \in dy\right]$$

となる．すなわち，$\Delta\tau(t)$ を与えた下での収益率 $\Delta X_{\tau(t)}$ に関する条件付確率分布は

$$\Delta X_{\tau(t)} \,\big|\, \Delta\tau(t) \sim N\left(\mu\Delta\tau(t), \sigma^2\Delta\tau(t)\right)$$

となる．以上の議論においては τ の選び方に仮定は置いていない．よって，$\tau(t)$ 過程をうまく選んでやれば，新しい時間軸上で計測される対数収益率分布を正規分布にすることができる.

また，このモデルにおいては，暦時間軸上の（一単位期間あたり）対数収益率 ΔY_t の分布は，混合正規分布となる．混合分布仮説は資産収益率のファットテール性を説明する理論としてファイナンスでしばしば取り上げられてきた重要な仮説である（e.g., Richardson and Smith, 1994）．

さて，Geman and Ané (1996), Ané and Geman (2000) においては，τ のモデルによらない推定方法を考案した．すなわち，収益率 ΔY_t のモーメントの理論値イコール計測値という制約条件の下で，ΔY_t の積率母関数の理論値（複数の未知パラメータで表現される）と計測値との差の 2 乗和を最小化するような非線形最適化によって，（条件付）正規分布のパラメータ μ, σ^2, および $\Delta\tau(t)$ の最初の 6 つのモーメント を推定した．Geman and Ané (1996) では，SP500 先物データを用いて，$\Delta\tau(t)$ の（4 つの）モーメントの推定値の大きさを検証し，τ の代理変数（proxy）として，（取引枚数ではなく）取引件数がふさわしいことを指摘した．一方，Ané and Geman (2000) においては，米国のハイテク銘柄（Cisco Systems, Intel）の高頻度データにより同様の結果を報告した．

株価の変化と経済活動との関連付け，とりわけ，取引量や頻度との関連性についての数多くの理論研究や実証研究は，高頻度データが容易に入手可能となるずっと以前からなされてきた．それらの研究では主にボラティリティ（価格変化の絶対値または 2 乗）と取引量との間に正の相関があることを指摘してきた（例，Tauchen and Pitts, 1983; Karpoff, 1987; Gallant et al., 1992）．一方，取引量ではなく取引件数がボラティリティを生成する，との指摘もなされていた（例，Jones et al., 1994）．以上で紹介した Ané および Geman の研究は，ア・プリオリにビジネス時間 τ に仮定を置かずに，米国株式や株価指数の高頻度データを用いた実証分析によって，ア・ポステリオリに取引件数が（元来観測不能な）τ の代替変数であることを見出した点に貢献がある．

4. 収益率変動性の一日内季節性

前節では，収益率分布の非正規性，ファットテール性を表現するために導入された時間変更の方法について紹介した．本節では，物理時間軸上で離散時間で（しかも等間隔に）サンプルされた価格系列を使って得られる，時間的に非均質な収益率系列を，時間的に均質な系列へ——特に分散が一定な系列へ——変換することを主目的とする研究である．勿論，ARCH モデルなどの時間的に変動する不均一分散を持つ条件付き正規分布を持つ収益率が，混合によってファットテール性を有する（無条件）分布を持つことを考えれば，前節と本節は，表裏の関係にある．

高頻度データは一日内季節性を持つことが知られている．特に，時系列の変動性を表すボラティリティも一日内パターンを持つ．時系列分析に際しては，定常かつ "均一な" 時系列データに変換し，一日内ボラティリティがフラットになるのが望ましい．このような観点から，文献ではボラティリティをフラット化するような時間変更の方法が提案されている．Zhou (1998) は，このようなボラティリティの平滑化を "de-volatilization" と呼んでいる．

いま，対数価格 $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ が，実時間軸 t 上を動く，式 (3.1) の型のダイナミックスを持つ拡散過程であるとする．ただし，ボラティリティ項 $\sigma = (\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$，$\sigma_t > 0$，は時間と共に変動するとする．$\sigma$ は，ランダムでも確定的でも良いが確率積分を定義することの可能な程度の正則性を持つものとする．また，σ は "U 字型" と呼ばれる一日内季節変動を持っても良い（一日内季節性については，例えば，Admati and Pfleiderer, 1988 を参照せよ）．なお，以下の議論においてはドリフト項の影響は本質的ではないので，簡便のため $\mu = 0$ として話を進める．この時，累積分散（integrated variance）を

$$\phi_t = \int_0^t \sigma_u^2 du \tag{4.1}$$

とおいて，(2.1) によって時間軸の変換を行うと，$Y_s = X_{\tau(s)}$ によって定義される活動時間軸上

で動く確率過程 $Y=(Y_s, s\geq 0)$ は，定理 2.3 によって，標準ブラウン運動となる．これより，もし，実時間軸上で等間隔にサンプリングされた，分散（ボラティリティ）が不均一な収益率の（十分に高頻度の）離散時系列データがある場合に，累積分散 ϕ が活動時間軸 s 上に予め設けられた十分に細かいグリッドを越える毎に（サブ）サンプリングをし，前のグリッドからの累積収益率を計算することが出来れば，（サブサンプルする毎に時計が動くような）活動時間軸上では等間隔に並んだ，おおよそ均一な分散を持つ離散時系列データに変換することができる．そして，累積分散 ϕ は，realized volatility などの推定量を使えば，高頻度データより精度良く計測される量であるから，σ に対するモデルの仮定を置くことなく，実装可能な時間変更を行うことができる．

なお，時間変更 τ（または ϕ）を決める際，時系列の変動性の指標として，収益率の分散の代わりに例えば収益率の絶対値を用いてもよい．それが Dacorogna et al. (1993) が提案した方法である．同論文に従って，市場で観測されるデータを用いて，物理時間を活動時間に変換するための時間変更を構成する具体的方法を次に紹介する．もちろん，この方法においては，マルチンゲールの表現定理は適用されない．

4.1 Dacorogna et al. (1993)：θ-時間尺度

チューリッヒに本拠地を持つ Olsen Associates の研究者達（以下，Olsen グループ）は，外国為替市場のボラティリティ変動の一日内および一週間内の季節性をモデルで表現するために，独自の（非確率的な）時間変更の方法を提案した．独自性のポイントは，市場の変動性を表す指標として，収益率の絶対値を用いたこと，そして，収益率（の絶対値）に対する「スケール則」と呼ばれる実証的性質を踏まえて，時間軸変換のスピード（傾き）を，一週間を細かく分割した短い区間ごとにデータより計測する方法を提案したこと，一方で，その時間軸変換のスピードの一週間の（グローバルな）パターンを多項式で（パラメトリックに）表現し，最小自乗法を用いて時間変更の関数形をデータから具体的に推定する方法を提案したことである．

$Y(t)$ を観測される高頻度データとする．単調増加関数 $\theta(t)$ を暦時間から活動時間への時間変更とする．$Y(t)$ は，一日内季節変動を説明する $\theta(t)$ と，一日内季節性を持たない確率過程 $X(t)$ との合成により，$Y(t)=X(\theta(t))$ と表現できるとする．

Dacorogna et al. (1993) は為替市場における一日内・一週間内のボラティリティの季節性を取り入れるために“θ-時間尺度（θ-time scale）”を導入した．θ を次のように定義する：

$$\theta \equiv \theta(t) \equiv a_0\,(t-t_0) + \sum_{k=1}^{3} \theta_k(t). \tag{4.2}$$

ただし，$\theta_k(t)$ は k 番目の市場におけるビジネス時間尺度（business time scale）

$$\theta_k(t) \equiv \int_{t_0}^{t} a_{1,k}(s)ds \tag{4.3}$$

である．k は世界の主要為替市場に対応するインデックスであり，$k=1$ はアジア，$k=2$ はヨーロッパ，$k=3$ は米国を表す．$a_{1,k}(s)>0$ は市場 k における暦時刻 s における市場活況度（market activity），t_0 は最初の市場の開場時刻，a_0 はその時点での市場活動である．$\theta(t)$ は確定的であり，データから推定できるとする．

Dacorogna et al. (1993) は，$a_{1,k}(s)$ の関数形として，昼休み時間における取引量の減少の見られる東アジア，ヨーロッパに対しては時間 t に関して 7 次の，アメリカに対しては 5 次の多項式を仮定した．彼らは，高頻度データを使って市場活況度を次のように推定することを試みた．

通貨や株式などの長期間の金融時系列データの収益率 R_t^{Δ} と収益率計測区間 Δ との間には，スケール則（scaling law）が成立するとの報告が，実証ファイナンスや経済物理の分野において

報告されている(例，Mantegna and Stanley, 1995)．ここでのスケール則(scaling law)とは，

$$(E[|R_t^{\Delta}|^d])^{\frac{1}{d}} = c(d)\Delta^{p(d)}$$

なる関係を言う．ここで，係数 $c(d) > 0$，指数 $p(d) > 0$ は d に依存してもよい．いま，特に $d = 1$ の場合，指数 $p := p(1)$ に限定して話を進める．なお，実証分析によれば，為替の場合には $p \simeq 0.6$ 程度であると報告されている(Dacorogna et al., 2001, p. 177)．

たとえば，為替データのように 1 日内かつ 1 週間の季節性を考える場合には，周期が一週間 $T = 168$ (時間)で収益率の変動パターンが現れると考える．いま $\Delta = 1$ 時間とおいて話を進めると，暦時間軸における第 i 区間 $((i-1)\Delta, i\Delta]$ $(i = 1, \ldots, 168)$ に対して，

$$\Delta\overline{\theta}_i = \left(\frac{E\left[|R_{i\Delta}^{\Delta}|\right]}{c^*}\right)^{\frac{1}{p}}$$

によって，対応する θ-時間軸上の第 i 区間の長さ $\Delta\overline{\theta}_i$ が計算できる．c^* は基準化のための定数である．(4.3)によれば，市場活況度は，時間変更写像 $\theta(t)$ の微分係数に他ならないから，$\Delta\overline{\theta}_i$ を使えば，第 i 区間の市場活況度は

$$\overline{a}_{(i)} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{E\left[|R_{i\Delta}^{\Delta}|\right]}{c^*}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (\text{但し}, \Delta = 1)$$

によって計算することができる．なお，c^* は

$$\frac{1}{168}\sum_{i=1}^{168}\overline{a}_{(i)} = 1 \tag{4.4}$$

となるように決めることにする．したがって，$E\left[|R_{i\Delta}^{\Delta}|\right]$ として，データ期間内の全ての第 i 区間収益率の実績値を集めて平均を取れば，市場活況度 $(\overline{a}_{(i)}, i = 1, \ldots, 168)$ をデータから実測することができる．

Dacorogna et al. (1993)は，$a(t_i) := a_0 - \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}(t_i) \equiv \left.\frac{d\theta(t)}{dt}\right|_{t=t_i}$，$i = 1, \ldots, 168$，を高頻度データより得られた市場活況度の実測値 $(\overline{a}_{(i)}, i = 1, \ldots, 168)$ に対して(重み付き)最小 2 乗法によってフィットさせることにより，11 個のパラメータ(詳細は省略)を推定した．

以上の枠組みにおいては，各 $a(t)$ は 1 週間を一周期として持つ変動パターンを持つことから，式(4.2)によって θ の将来の動きを予測することも可能である．

θ-時間は，(4.4)によって，暦時間での 1 週間(=168 時間)が θ-時間での 1 週間となるように調整される．市場活動の高い時間帯を拡大し，低い時間帯を縮小することによって，変動(収益率の絶対値 $|R_{i\Delta}^{\Delta}|$)の平滑化を図るものである．

また，$\theta_k(t)$ の 1 週間の変化によって，主要 3 市場の活況度の相対ウェイトを知ることも可能である．すなわち，$\theta(t + 1\ \text{週間}) - \theta(t) = 1$ (週間)であるから

$$w_k := \frac{\theta_k(t + 1\ \text{週間}) - \theta_k(t)}{\theta(t + 1\ \text{週間}) - \theta(t)} = \theta_k(t + 1\ \text{週間}) - \theta_k(t), \qquad k = 1, 2, 3,$$

は k 番目の市場の 1 週間における市場活況度の割合である．

実際の適用上の留意点，銀行休業日，夏時間などへの対応に関しては，例えば Dacorogna et al. (2001)の 6.3.2 を参照せよ．

θ-時間軸上の高頻度データ分析は，Olsen グループを中心になされているが，この θ-時間変更を行っても，(収益率の計測間隔が短い領域において)GARCH モデルの“時間合算性”仮説(temporal aggregation)に反する実証結果が同グループによって報告された(Müller et al., 1997)．“時間合

算性" 仮説とは, 短い時間ステップで動く GARCH 過程が, 区間を結合して長くした時間ステップにおいてもやはり GARCH 過程になると主張する仮説である[6]．すなわち，Müller et al. (1997) の報告は，高頻度データの背後にただ一つの GARCH 過程がある，という見方の限界を示すものと考えられる．一つの代替案として，異なる時間幅毎に異なる ARCH/GARCH 過程が存在し，それらが重なり合って一つの高頻度時系列データが生成されるとの考え方も提案されている (Müller et al., 1997 による HARCH モデル，同グループが 93–94 年頃に提案したとされる "不均一市場仮説" (heterogenous market hypothesis); Dacorogna et al., 1998 を見よ)．

4.2 Ghysels and Jasiak (1994): 確率ボラティリティと市場活況度

収益率ボラティリティの確率的変動性を記述するためのモデルとして，確率ボラティリティ・モデルが数多く提案されてきた．一方，高頻度収益率に対しても，ボラティリティの確率的変動やクラスタリング現象が報告されており (Dacorogna et al., 2001)，他方で，上で紹介したようにボラティリティは 1 日内 (プラス 1 週間内) の変動パターンも併せ持つことから，時間変更を施すことによってこれらの実証的性質を同時に記述しようとする試みが Ghysels and Jasiak (1994), Ghysels et al. (1995) らによってなされた．彼らは，先行研究 (Stock, 1988 など) にならって，時間変更を "時間変形" (time deformation) と呼んだ．

Ghysels らのアプローチの斬新性は，証券価格の過程ではなく，ボラティリティの過程に時間変更を施すことによって，確率ボラティリティの枠組みの中でボラティリティの 1 日内パターンの表現を試みたこと，観測可能な (市場活況度を表す) 外生変数の導入による非線形回帰モデルによって新たな時間軸を定義したことである．

Ghysels and Jasiak (1994) は，ボラティリティ過程を，市場の "活況度" (market activity) によって駆動される劣後化済み確率過程 (subordinated stochastic process) として定義した．これは，ボラティリティが情報の到着 (information arrival) など取引のダイナミックスを決めるような観測可能または不能な変数に関連していると考えることによって，複雑な市場の挙動を比較的容易にモデル化しようとするアプローチである．彼らは，表記法も含めて，Stock (1988) による時間変形モデルの枠組みを確率ボラティリティ・モデルに適用した．本節でも，Stock (1988), Ghysels and Jasiak (1994) の表記法を踏襲する．特に，(暦時間軸上を進む) 連続時間確率過程は $Y(t)$，それに対応する離散時間確率変数は Y_t などと書くものとする．

いま，ボラティリティ過程に対する新たな時間軸 (オペレーション時刻，operational time) と元の時間軸 (暦時刻，calender time scale) との間で時間変更を行う写像 $s = g(t)$ が存在し，

$$dP(t) = \mu P(t)dt + \sigma(g(t))\,P(t)dW^1(t), \qquad 0 \le t \le T \tag{4.5}$$

$$d\log\sigma(s) = a(b - \log\sigma(s))dt + cdW^2(s), \qquad 0 \le s \le T \tag{4.6}$$

であるとする．この $g(t)$ は，取引量や市場取引のスピードに影響する他の変数をも含み得る滑らかな関数で，$\dot{g}(t) \equiv \frac{dg(t)}{dt} \in (0,\infty)$, $g(0) = 0$, $g(T) = T$ なる性質を持つものとする．

さらに，一日内の活動パターンを表現するため，$\dot{g}(u) = const$，$t-1 \le u < t$ であるとする．ここで，連続時間 t の計測尺度は日単位，$\Delta t = 1$ (日) で書かれている．さらに，暦時刻に対するオペレーション時刻の変化スピード $\dot{g}(u)$ が，説明変数 Z_{t-1} によって，

$$\dot{g}(u) \equiv \dot{g}(u, Z_{t-1}) \equiv \frac{\exp(c' Z_{t-1})}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\exp(c' Z_{t-1})}, \qquad t-1 \le u < t$$

とロジスティック変換を介して書けるとする．(著者らは，この仮定においては，分母が将来の情報を含んでいるので可測性に問題があるが，分母は単にスケーリング・ファクターとして彼らの推定アルゴリズムの数値的安定性のために導入したものであり，本質的に問題はないとしている．ちなみに，先行研究である Stock, 1988 と同様の定式化である．) c は (非線形) 回帰

の係数である．

オペレーション時間の暦時間 1 日の進みに対する増分を $\Delta g(t)=g(t)-g(t-1)$ と書くとすると，$\Delta g(t)\equiv\dot{g}(u), t-1\le u<t$，であり，先の（連続時間）確率ボラティリティモデルは，暦時間 t において次のように離散時間表現される：

$$\Delta\log P_t - a_1\Delta\log P_{t-1} - \lambda = e^{h_t}\varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t\sim iid\ N(0,1), \tag{4.7}$$

$$h_t=(1-e^{a\Delta g(t)})b+e^{a\Delta g(t)}h_{t-1}+v_t, \qquad v_t\sim N\left(0,-\frac{\Sigma(1-e^{2a\Delta g(t)})}{2a}\right), \tag{4.8}$$

ここで，a_1,λ,Σ は適当な定数，$h_t:=\log\sigma(g(t))$ である．

Ghysels and Jasiak (1994) は，これを，線形状態空間表現（linear state-space representation）と見て，擬似最尤法によってモデルの推定を行った．

Ghysels et al. (1995) では，一日内の市場の活況度を記述するために，$g(t)$ の具体的な例を考えた．いま，$\Delta g(t)$ が市場の活況度が平均的な活況度と平均からの乖離の 2 つの部分から成ると考え，以下のように表されるとする．外国為替市場における．（物理時間）区間 $[t-1,t]$ におけるクォート回数を nq_{t-1}，平均回数を nqa_{t-1}，とすれば，活況度の情報を与える変量 $Z_{t-1}=(nqa_{t-1},(nqa_{t-1}-nq_{t-1}))$ となり，

$$\Delta g(t)=\exp(c'Z_{t-1})=\exp\left(\Theta_{avg}nqa_{t-1}+\Theta_{dev}\left(nqa_{t-1}-nq_{t-1}\right)\right)$$

で表される．

なお，$\Theta_{dev}=0$ のケースにおいては，$\Delta g(t)$ は平均クォート回数 $\{nqa_t\}$ の関数となり，この時，ボラティリティは“周期的”AR 過程（periodic autoregressive process）になる：

$$h_t=\gamma_t+\alpha_t h_{t-1}+W_t.$$

（“周期的”AR 過程モデルについては Bollerslev and Ghysels, 1996 を参照せよ．）ここで，γ_t,α_t は 1 日周期で繰り返す関数 $\gamma_t=\gamma_s,\alpha_t=\alpha_s,s=t+1$（日）である（これらの係数は，データ分析に際して，5 分，10 分間隔などの離散サンプルの頻度に依存しうる）．勿論，パラメータ値の一日内変化は，$\gamma_t=1-e^{a\Delta g(t)}$，$\alpha_t=a\Delta g(t)$ によって決められる．Ghysels et al. (1995) は，活況度を表す変量として，クォート回数に加えて，絶対収益率，ビッド・アスク・スプレッドの 3 変量を取り上げ，$\Delta g(t)$ の過程に対する実証分析を行った．

4.3 Breymann, et al. (2006)：高頻度世界株価指数

Breymann et al. (2006) は，Platen ら（例，Platen and Heath, 2006）によって提唱されている「ベンチマーク・アプローチ（BA）」の枠組みにおいて，一日内世界株価指数（World Stock Index）を高頻度観測データから構築する方法を提案した．BA において，最適成長ポートフォリオ（GOP）を十分に分散化された別のポートフォリオによって近似できることは，ポートフォリオ最適化や派生証券価格付けなどの実用上重要である．

Long (1990) の研究成果によって，割引後 GOP 過程の持つドリフト項は，その拡散項によって一つ定まることが知られている．一方，高頻度データを用いれば，短い期間であっても拡散係数の推定は比較的容易であることが知られている．このことから，BA の枠組みにおいて，拡散係数のみによって定まる市場モデルは極めて都合が良い．他方で，高頻度データ分析においては，日次や週次で現れるパターンをモデルに組み入れる必要がある．Breymann et al. (2006) は，“市場活動”（market activity）なる観測可能な量を提案し，これがボラティリティ（をベースにした時間変更）よりも実証的特徴を織り込むのに優れていると主張した．

時間変更によるモデル化技法の観点からは，Breymann et al. (2006) においては，収益率ボラティリティの確率的変動や一日内季節変動を捉えるために，時間変更を 2 度使用する．まず，

(“基準化” された)成長最適ポートフォリオが，市場活動を表す量による時間変更によって(その特別なケースとして)次元が 4 の平方根過程(square root process)を含むクラスの拡散過程で表されることを示した．そして，その市場活動が，確定的なボラティリティ(一日内・一週間内季節性を表現する)を持つ平均回帰過程を時間積分したものとしてモデル化した．

いま，株式が d 種類あり，それぞれランダムなドリフトとボラティリティを持つ連続型 Itô 過程があるとする(標準ブラウン運動 $(W^1,\ldots,W^d)$ によって駆動されているとする)．これらによって構成される GOP は，GOP が定義によりその成長率を最大化するようなポートフォリオであることから，ドリフトとボラティリティの関係が一意に定まり，その価値 V は

$$dV(t)=V(t)\left(r(t)dt+\sum_{k=1}^{d}\theta^k(t)(\theta^k(t)dt+dW^k(t))\right)$$

なる形をしたダイナミックスを持つことが示される(Long, 1990)．ここで，θ^k は k 番目のリスクファクターのリスクの市場価格(market price of risk)，$r(t)$ は安全資産の利息である．よって，安全資産 $\exp(\int_0^t r(s)ds)$ による割引後 GOP の価値 $V^*(t)=\exp(-\int_0^t r(s)ds)V(t)$ は

$$dV^*(t)=V^*(t)\,|\theta(t)|\,(|\theta(t)|\,dt+dW^*(t))$$

なるダイナミックスを持つ．ここで，

$$|\theta(t)|=\sqrt{\sum_{k=1}^{d}(\theta^k(t))^2},\qquad dW^*(t)=\frac{1}{|\theta(t)|}\sum_{k=1}^{d}\theta^k(t)dW^k(t)$$

とおいた．いま，割引後(discounted)GOP 過程のドリフト項を $\alpha(t)=V^*(t)\,|\theta(t)|^2$ と書く．同論文では，$\alpha(t)=\alpha_0(t)m(t)$ と，確定的なドリフト部分 $\alpha_0(t)=\xi e^{\eta t}(\xi>0,\eta>0)$，1 の周りを変動する市場活動を表す非負の確率変動部分 $m(t)$ に積分解した．割引後 GOP 過程 V^* から確定的ドリフト α_0 を除いたもの，$Y(t)=\frac{V^*(t)}{\alpha_0(t)}$ を基準化済み(normalized)GOP と呼ぶ．

さらに，$m(t)$ を使って，市場活動時間を

$$\psi(t)=\int_0^t m(s)ds,\qquad 0\le t\le T$$

によって定義する．Breymann et al. (2006)の使用したデータの例では，$t=0$ は 1996 年 4 月 5 日，00:00:00:GMT，$t=T$ は 2001 年 5 月 30 日，00:00:00:GMT，$\psi(0)=0$，$\psi(T)=5.25$(years)である．$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E[\psi(T)]=1$ と仮定する．

この時，$\psi=\psi(t)$ 時間で観測した基準化後 GOP 過程 $\{\overline{Y}_\psi,\psi\in[0,\psi(T)]\}$，$Y_t\equiv\overline{Y}_{\psi(t)}$，は

$$d\overline{Y}_\psi=\eta\left(\frac{1}{\eta}-\frac{\overline{Y}_\psi}{\overline{m}_\psi}\right)d\psi+\sqrt{\overline{Y}_\psi}d\overline{W}_\psi,\qquad 0\le\psi\le\psi(T)$$

なるダイナミックスを持つことが示される．ここでは，$\overline{W}_\psi$ はブラウン運動，$m_t\equiv\overline{m}_{\psi(t)}$ である．特に $\overline{m}_\psi\equiv1$ のケースにおいては，次元(dimension)4 の平方根過程(square root process)となる．これより，Itô の公式によって，

$$d\left(\sqrt{\overline{Y}_\psi}\right)=\left(\frac{3}{8\sqrt{\overline{Y}_\psi}}-\frac{\eta\sqrt{\overline{Y}_\psi}}{2\overline{m}_\psi}\right)d\psi+\frac{1}{2}d\overline{W}_\psi,\qquad 0\le\psi\le\psi(T)$$

となる．すなわち，$\sqrt{\overline{Y}_\psi}$ の 2 乗変動(quadratic variation)は，

$$\langle\sqrt{\overline{Y}}\rangle_\psi=\frac{\psi}{4},\qquad 0\le\psi\le\psi(T)$$

である．いま，上式を t で微分することにより，

$$\frac{d\langle\sqrt{Y}\rangle_{\psi}}{dt}=\frac{1}{4}\frac{d\psi}{dt}=\frac{1}{4}m(t).$$

よって，実際の観察データより計算される，基準化後 GOP（を近似する指数ポートフォリオ）の平方根過程 $\left(\sqrt{Y_{\psi(t)}}\equiv\sqrt{Y_t}\right)$ の quadratic variation の，物理時間軸 t に対する傾きを計算すれば，市場活動 $m(t)$ が実際に観測される（少なくとも離散的に）ことが分かる．以上の議論においてモデルの詳細は仮定してこなかったことから，上式はごく一般の状況で成立する関係式である．特に，$m(t)$ 過程については自由に選ぶことが出来る．

Breymann et al. (2006) は，（観測される）市場活動 $m(t)$ を一日内季節性を表現するために次のようにモデル化した（同文献の式 (4.2)）[7]．

$$dm(t)=\gamma\beta^2(t)m(t)\left(\frac{p(t)+1/2}{\gamma}-m(t)\right)dt+\beta(t)m(t)dW(t)$$

ここで，$p(t)>0$ は参照水準（reference level），$\beta(t)>0$ は市場活動のボラティリティ，$\gamma>0$ は調整スピードを制御する，確定的な関数および定数である．次のような変換を行うことにって，市場活動の対数値のダイナミックスが，定数のボラティリティを持つようにする．すなわち，活動ボラティリティ時間 $\{\tau(t):t\in[0,T]\}$ を

$$\tau(t)=\langle\ln(m)\rangle_t=\int_0^t\beta^2(s)ds,\qquad 0\le t\le T$$

によって導入し，上と同様，$\{\overline{m}_\tau,\tau\in[0,\tau(T)]\}$，$m(t)\equiv\overline{m}_{\tau(t)}$ と時間変更すると，Itô 公式の適用を経て

$$d\ln(\overline{m}_\tau)=\gamma\left(\frac{p_\tau}{\gamma}-\overline{m}_\tau\right)d\tau+d\overline{W}_\tau,\qquad 0\le\tau\le\tau(T)$$

となるとした（同文献の式 (4.6)）．これは，参照水準 $\frac{p_\tau}{\gamma}$ で調整スピード γ であるような平均回帰過程である．Breymann et al. (2006) では，参照水準における季節変動を説明するため，$p_\tau\simeq E[\overline{m}_\tau]\gamma+\frac{dE[\ln(\overline{m}_\tau)]}{d\tau}$ と近似できると主張した．一方で，データによるモデルの推定に際しては，簡便のために $p_\tau=const$ とおくことで，$\overline{m}_\tau$ がその定常密度としてガンマ密度を持つことを利用し，（近似）尤度をペナルティ付き最大化することによって，γ を求める方法を提案した．

Breymann et al. (2006) は，34 の各国株価指数（ドル建て）と Olsen グループの 5 分次の為替データ（ティック）を用いて，高頻度世界株価指数，MCI（市場時価総額ウェイト），GDPI（GDP ウェイト），EWI（等ウェイト）の 3 系列 (4/4/96–6/29/01) を作った．これらの 5 分次離散データよりパラメータの推定を行い，時価総額ウェイトによる世界株価指数が，GOP を良く近似するとした．

5. 価格ジャンプ

5.1 レヴィ過程と派生証券市場

本節で紹介するアプローチは，主に派生証券の評価への応用を主な動機として開発されたものであり，従って，派生商品価格の計算容易性や，派生証券市場のデータより生成されるインプライド・ボラティリティ・カーブへのフィッティングの良さなど，リスク中立確率の下でのクロスセクションでの（一時点における市場全体の）分析への適用性が重視される．したがって，本稿の主旨である，高頻度データ分析における時間変更というテーマとは必ずしも合致しないが，時間変更の金融工学への応用という点において重要であることに加え，さらに，早晩，原

資産のみならず派生証券に対する高頻度データの利用も本格化すると予想されることから，本稿においても代表的な文献を簡潔に紹介することにする．

幾何ブラウン運動（＝ Dlack-Scholes モデル）は，連続時間における証券収益利率の挙動を記述するモデルとしての出発点であるが，実証研究においては，実際の収益率の過去の時系列データや，派生証券の市場価格から逆算されるリスク中立確率の下での価格過程の，幾何ブラウン運動からの構造的な乖離は，市場参加者の間で共通の認識となっている．

Carr and Wu (2004) は，次の 3 つの顕著な実証的特徴の記述を挙げている：(i) 資産価格はジャンプをし，それが非正規の収益率分布を生成させていること，(ii) 収益率のボラティリティは時間の推移と共に確率的に変動すること，(iii) 収益率とボラティリティには相関があること．すなわち，ジャンプ型モデルの研究は，(i) の特徴をまず捉えながらも (ii) や (iii) を如何に倹約的に表現し，しかも派生証券価格付けなどの実用性に優れたモデルを構築するかを主眼に行われてきている．

Madan et al. (1998) は，（ドリフト付き）ブラウン運動に対してガンマ過程（gamma process）を劣後過程として時間変更することによって得られる Variance-Gamma 過程より，オプション価格式の導出を行い，SP500 オプションの市場データを用いてモデルの当てはまりの良さを検証した．

Carr et al. (2003) においては，確率的に変動し平均回帰するボラティリティを持つように，レヴィ過程の拡張化を図り，計 25 もの新たな確率ボラティリティ・レヴィモデル（stochastic volatility Lévy model）を構築した．レヴィ過程 X として，正規逆正規（normal inverse Gaussian）モデル（Barndorff-Nielsen and Shephard, 1998），対称 VG モデル（symmetric variance gamma, Madan and Seneta, 1990），CGMY モデル（Carr et al., 2002）を取り上げた．時間変更 τ として，Cox-Ingersoll-Roll モデルの時間積分過程を用いた．これによって確率ボラティリティおよびクラスタリングを持つ株価過程を生成させた．さらに，τ として，片側純ジャンプ・レヴィ過程（pure jump Lévy process）の駆動する Ornstein-Uhlenbeck 方程式の解として表される平均回帰過程に対して，ジャンプが株価に影響を与えるような定式化を行うことによって，レバレッジ効果も生成させた．

同論文では，これらの新たに提案された “SVLP” モデルを，SP500 オプションの月次時系列データ（OTM，満期までの期間が 1 月から 1 年の範囲，2000 年の毎月第 2 水曜日のデータ）に対して適用し，モデルによるオプションの理論価格と市場価格との乖離をベースとした（全行使価格，全満期に関して計算される）RMSE を最小化することによってモデル推定を行った．そして，相対価格誤差によって，提案モデル間のパフォーマンスの比較を行った．

Carr and Wu (2004) は，先述の実証データの特徴 (i)–(iii) を同時かつ倹約的に記述するための方法として，時間変更済みレヴィ過程（time-changed Lévy processes）のモデリングの枠組を提案した．すなわち，(i) については，（非正規収益率を生成することの出来る）純ジャンプ・レヴィ過程の導入によって対応でき，一方 (ii) については，そのレヴィ過程に確率的時間変更を施すことによって対応し，さらに，(iii) に対応するために，レヴィ過程を駆動するイノベーション過程と，確率的時間軸を駆動するイノベーション過程とを相関させた．特に，それらの間に負の相関を入れることにより，レバレッジ効果を捕まえることも可能となる．Carr and Wu (2004) は，それまでの確率ボラティリティを持つレヴィ過程（stochastic volatility Lévy models）やアフィン型のポアソン・ジャンプ拡散過程モデル（affine Poisson jump diffusion）を包含するような一般的なモデリングの枠組みを提案し，その構成要素となるレヴィ測度や，時間変更を定める “活動率” 過程の具体例について数多く紹介した．さらに，高速フーリエ変換（FFT）を利用した派生証券の評価方法についても議論した．

一方，Geman et al. (2001) は，対数証券価格のモデルとして，以下に紹介する議論を行い，

ジャンプ型の時間変更をブラウン運動に施した純ジャンプ過程のモデルを提案した．

いま，P を証券価格とする．ファイナンス理論における，無裁定性の議論に従えば，対数証券価格 $\ln P$ は，セミマルチンゲールでなければならない(Delbaen and Schachermayer, 1994)．一方，任意のセミマルチンゲールは，時間変更済みブラウン運動として書くことが出来る(定理 2.4)から，あるブラウン運動 W と時間変更 τ が存在して，

$$\ln P_t = \ln P_0 + W_{\tau_t}$$

と書くことが出来る．より一般的なケースを扱うために，W の代わりに(W で駆動される)連続 Itô 過程 X を考え，証券価格過程 $\ln P$ が，X と τ とによって，

$$\ln P_t = \ln P_0 + X_{\tau_t}$$

と表現されるケースを考える．X は連続であるから，対数価格 $\ln P$ が純不連続(purely discontinuous)過程であれば，必要かつ十分にして時間変更 τ もまた純不連続過程である．次に，価格が絶えず変化する活発な状況(high activity)においては，価格変動の頻度が無数にあるからそれらの変化幅は微小サイズであるが，一方で正の下限を持つ有限サイズの価格変化は高々有限回しか起こりえない．このように価格変動が活発であれば，時間変更過程もまた活発となる．

いま仮に，時間変更 τ が連続であり，特に，その 2 次変動 $\langle\tau\rangle_t$ が絶対連続であるとする．すると，τ もやはり Itô 過程となるが，そもそも τ は増加過程であるから，そのマルチンゲール項は恒等的にゼロでなければならない．τ がスムーズであるということは，すなわち，時間変更 τ が，(時間について)局所的に確定的であることを意味する．Geman et al. (2001) は，このような議論展開を踏まえて，仮に，時間変更 τ が市場価格に織り込まれる“情報フロー”と関連しており，かつ，それらの“情報フロー”に不確実性がある(すなわち，不規則に市場に到着する)ならば，時間変更 τ は純不連続過程であり，従って，価格過程 $\ln P$ も純不連続過程でなければならないとした．

同論文は，CGMY モデルなどを含む，様々なクラスのレヴィ過程に対して，具体的な時間変更の例を示した．さらに，X と τ が独立でないケースとして，完全に単調なレヴィ密度を持つ均質なレヴィ過程に対しては，時間は価格変化幅の指数ウェイトによって計測することができることを示した．

同論文で扱った時間変更としては，ポアソン過程，ガンマ過程，一般の劣後過程，原点($x=0$)におけるブラウン運動の“逆局所時間”(inverse local time)である．各ケースにおいて，価格過程を 2 つの増加過程 — 各々が価格上昇と下降に対応 — として表現し，価格過程が，価格変化に関連するランダム時間にて評価されるブラウン運動として表現した．さらに，オプション価格付けや統計的推測などへの利用可能性を見込んで，レヴィ密度や特性関数がクローズド・フォームで書けるようなレヴィ過程の例を幾つか紹介した．

なお，レヴィ過程の理論全般に関しては，例えば，Bertoin (1996), Sato (1999), Applebaum (2004)を，それらの金融モデリングへの適用に関しては，Schoutens (2003) や Cont and Tankov (2004)を参照せよ．

5.2 Barndorff-Nielsen and Shephard (2006)：レヴィ過程と realized volatility

Barndorff-Nielsen and Shephard (2006) は，価格ジャンプの実現ボラティリティ(realized volatility，以下 RV)に対する影響を評価するために，時間変更済みレヴィ過程の時系列の 2 次特性(second-order properties)を調べた．先行研究である Carr et al. (2003) や Carr and Wu (2004) にならい，セミマルチンゲール Y を対数価格として，

$$Y_t = \mu t + Z_{\tau_t}$$

とおいた．ここで，μ は定数，Z は $Z_0=0, \mathrm{Var}[Z_t]<\infty$ であるレヴィ過程，τ は有限時間変更 $(\tau_t<\infty, \forall t)$ である．また，$Z \perp\!\!\!\perp \tau$ とした．さらに τ として，非負の確率過程 g によって

$$\tau_t=\int_0^t g_s ds$$

であるものを考えた．この時，Y のマルチンゲール要素 M が連続パスを持つ (w.p.1) こととと Z がブラウン運動であることとは同値である．

h を (物理時間上の) 固定長，i を日を表すインデックスとすると，もし h が 1 日を表すとすれば，第 i 日次収益率は $y_i:=Y_{ih}-Y_{(i-1)h}$ と書ける．さらに，高頻度のケース，1 日に M 個，幅 $\delta=h/M$ の等間隔グリッドによって収益率を観測すると，第 i 日第 j 番目収益率は $y_{j,i}:=Y_{(i-1)h+j\delta}-Y_{(i-1)h+(j-1)\delta}$，$j=1,\dots,M$，と書くことができる．これによって，第 i 日 realized volatility (以下，“RV”) は，

$$[Y_\delta]_i:=\sum_{j=1}^M y_{j,i}^2$$

によって定義される．RV は，Y が“ブラウン運動型”セミマルチンゲール (Brownian semimartingale) の文脈において，日次ボラティリティ ($h=1$ 日の累積分散) の推定量としてポピュラーな統計量であるが，Barndorff-Nielsen and Shephard (2006) は，時間変更済みレヴィ過程の文脈において，推定量としての妥当性について議論した．

以下，物理時間軸上の一日の経過時間を“ビジネス時間”軸上で

$$g_i:=\tau_{ih}-\tau_{(i-1)h}$$

と表すことにしよう．なお，上の設定のもとでは，

$$\mathrm{Var}[y_i|g_i]=g_i\,\mathrm{Var}[Z_1],$$

であることに注意しよう．すなわち，時間変更 τ のパスを知ると，上記量を計算することができる．確率変数 Z_1 の j 次のキュミュラント (cumulant) を κ_j にて表すことにする．いま，Z が $\kappa_4<\infty$ であるような対称レヴィ過程であるとすると，もし $\kappa_4=0$ ならば，Z はスケール変換済みの (ドリフト付き) ブラウン運動となることが示される．すなわち，$\kappa_4=0$ か否かによって，対称レヴィ過程がジャンプ型か否かをテストすることができるのである．

論文では，時間変更 τ に対して，時系列的 2 次特性を課す．すなわち，そのスピードを表す確率過程 g は，平均 ξ，分散 ω，自己相関関数 r の共分散定常 (covariance stationary) 過程であると仮定する．すると，

$$E[\tau_t]=\xi t, \qquad \mathrm{Var}[\tau_t]=2\omega^2 r_t^*, \quad \text{ただし } r_t^*=\int_0^t\int_0^s r_u du ds$$

である．

いま，仮に Y の有限変動要素 A と時間変更 τ とが連続パスを持ち，一方マルチンゲール要素 $M_t=W_{\tau_t}$ (W はブラウン運動) であるならば，Y の 2 次変動は $[Y]_t=\tau_t$ となることは良く知られている．すなわち，このケースにおいては，1 日あたりの RV $[Y_\delta]_i$ は，$M\to\infty$ に従い，$[Y_\delta]_i \xrightarrow{P} ([Y]_{ih}-[Y]_{(i-1)h})=:[Y]_i=\kappa_2 g_i$ となり，$[Y_\delta]_i$ は推定対象を $\kappa_2 g_i$ とした時の一致推定量である．しかし，非ブラウン運動の時間変更済みレヴィ過程のケース $M_t=Z_{\tau_t}$ においては，そうはならない；すなわち，$[M]_t\neq\kappa_2\tau_t$，よって $[Y_\delta]_i \xrightarrow{P} [Y]_i\neq\kappa_2 g_i$.

g が共分散定常でかつ $\kappa_4<\infty$ の時，Barndorff-Nielsen and Shephard (2006) は RV のモーメントを計算した (Proposition 6)：

$$E[[Y_\delta]_i-\kappa_2 g_i]=\kappa_1^2(2\omega^2 M r_\delta^*+M^{-1}h^2\xi^2),$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[[Y_\delta]_i - \kappa_2 g_i] &= \kappa_4 h\xi + (2\kappa_2^2 + 4\kappa_1\kappa_3)(2\omega^2 M r_\delta^* + M^{-1}h^2\xi^2) \\
&\quad + O(M^{-2}), \\
\mathrm{Cov}[([Y_\delta]_i - \kappa_2 g_i), \kappa_2 g_i] &= O(M^{-2}), \\
\mathrm{Cov}[([Y_\delta]_i - \kappa_2 g_i), ([Y_\delta]_{i+s} - \kappa_2 g_{i+s})] &= O(M^{-3}).
\end{aligned}
$$

同論文の著者達は, $2M^2 r_\delta^* \to h^2$ (as $\delta \downarrow 0$) なる事実とあわせて (Barndorff-Nielsen and Shephard, 2002), 次の点を指摘した ($\delta = h/M$ に注意せよ) :

- (推定対象) $\kappa_2 g_i$ の推定量としての $[Y_\delta]_i$ のバイアスは, 第 1 式で与えられ, これは $O(M^{-1})$ である.
- RV の推定誤差の変動性は第 2 式で与えられる. 非ブラウン運動のケース ($\kappa_4 > 0$) においては, $M \to \infty$ であっても右辺第 1 項は消えない. これは, RV $Y_{\delta i}$ が $\kappa_2 g_i$ を一致推定しないことを示している. また, バイアスの 2 乗項は $O(M^{-2})$ オーダーであるから, 最初の 2 項の大きさと比べると, MSE 計算に関してはバイアスは殆ど影響を及ぼさない.
- 第 3 の式より, RV の誤差 $([Y_\delta]_i - \kappa_2 g_i)$ と (推定対象) $\kappa_2 g_i$ とは, 漸近的に無相関である.
- 第 4 の式より, RV の日次系列は無相関である.

とりわけ重要な点として, 同著者達は, ブラウン運動の代わりにジャンプ型の (時間変更済み) レヴィ・モデルを用いることにより, 実質上, RV 誤差の変動性のみが影響を受ける (増大する) ことを指摘した.

さらに, これらのモデルについての推測を行うために, $[Y_\delta]_i$ の 2 次特性をモデル・パラメータの関数として表現した. すなわち, 同じ仮定のもとで (Proposition 7),

$$
\begin{aligned}
E[[Y_\delta]_i] &= \kappa_2 h\xi + \kappa_1^2(2\omega^2 M r_\delta^* + M^{-1}h^2\xi^2), \\
\mathrm{Var}[[Y_\delta]_i] &= 2\omega^2\kappa_2^2 r_h^* + \kappa_4 h\xi + (2\kappa_2^2 + 4\kappa_1\kappa_3)(2\omega^2 M r_\delta^* + M^{-1}h^2\xi^2) + O(M^{-2}), \\
\mathrm{Cov}[[Y_\delta]_i, [Y_\delta]_{i+s}] &= \kappa_2^2\omega^2 \diamondsuit r_{hs}^* + O(M^{-2}), \qquad s = \pm 1, \pm 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

ここで, $\diamondsuit r_{hs}^* = r_{h(s+1)}^* - 2r_{hs}^* + r_{h(s-1)}^*$ (≥ 0) である.

これより, ジャンプ (この時, $\kappa_4 > 0$) は $E[[Y_\delta]_i]$ や $\mathrm{Cov}[[Y_\delta]_i, [Y_\delta]_{i+s}]$ に殆ど影響しないことが分かる. 表記の簡易性のため, $\kappa_2 = 1$ とおき, $M \to \infty$ を取ると, $[Y_\delta]_i$ の自己相関関数 (ACF) は

$$
\mathrm{Corr}[[Y_\delta]_i, [Y_\delta]_{i+s}] \to \frac{\omega^2 \diamondsuit r_{hs}^*}{2\omega^2 r_h^* + \kappa_4 h\xi} = \mathrm{Corr}[[Y]_i, [Y]_{i+s}] \leq \frac{\diamondsuit r_{hs}^*}{2r_h^*} = \mathrm{Corr}\left[g_i, g_{i+s}\right],
$$

ここで, 等号は Z がブラウン運動のケースにおいてのみ成立する. 従って, RV $[Y_\delta]_i$ の自己相関関数 (ACF) は常に g_i のそれを過小推定する. また, $M \to \infty$ の時,

$$
\mathrm{Corr}[[Y_\delta]_i, \kappa_2 g_i] \to \frac{r_h^*}{\sqrt{r_h^*\left(r_h^* + \frac{\kappa_4}{2\omega^2\kappa_2^2}h\xi\right)}}
$$

となる. 一方, M が固定されている時, $\kappa_4 \to \infty$ に持ってゆくと, $\mathrm{Corr}[[Y_\delta]_i, [Y_\delta]_{i+s}]$, Corr $[[Y_\delta]_i, \kappa_2 g_i]$ ともにゼロへと収束する.

以上 $\kappa_4 < \infty$ かつ g の共分散定常性の仮定のもとで得られた RV の平均や共分散を計算する公式を使えば, RV の実現値列 $\underline{[Y_\delta]} := ([Y_\delta]_1, \ldots, [Y_\delta]_n)$ より, モデルのパラメータを推定することができる. 同論文では, $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$ とおき (そうでない場合には, 漸近的 ($M \to \infty$) に議論可能), さらにモデルを同定するために $\kappa_2 = 1$ と固定し, Barndorff-Nielsen and Shephard (2002) と同様な擬似尤度を構成した (なお, $\underline{[Y_\delta]}$ が正規でない場合の推定量の非最適性については指摘

するに止めている）．さらに，パラメータを数値的に容易に得るためのアルゴリズムについて議論した．また，計算の容易性の観点から，g に対する時系列モデルとして，以下を取り上げた．

(i) OU 過程の 1 ファクターモデル：

$$r_s = \mathrm{Corr}\,[g_s, g_{t+s}] = \exp(-\lambda s).$$

(ii) OU 過程の複数ファクターモデル（OU 過程が複数個重なったもの，“Superposition” モデル）：

$$r_s = \sum_{j=1}^{J} w_j \exp(-\lambda_j s), \qquad \sum_{j=1}^{J} w_j = 1 \text{ and } w_j \geq 0.$$

(iii) 対数正規-OU 過程モデル（$\log\tau$ が正規-OU 過程となるモデル）：

$$r_s = \frac{\exp(\omega_{\log}^2 e^{-\lambda|s|}) - 1}{1 - e^{-\omega_{\log}^2}}, \quad \text{while } \xi = e^{\xi_{\log} + \omega_{\log}^2/2} \text{ and } \omega^2 = e^{2\xi_{\log} + \omega_{\log}^2}(e^{\omega_{\log}^2} - 1).$$

(iv) 長期記憶モデル：

$$r_s = \int_0^\infty e^{-s\lambda}\pi(d\lambda).$$

ここで，確率測度 π として，例えば $\Gamma(2H, \alpha)$ 分布（ただし，$0 < H < 1/2, \alpha > 0$）が用いられる．

さらに，実証分析として，Olsen グループの 5 分次の為替データ（DM/USD, 12/1/86–11/30/96）を使って，これらのモデルの推定を行った．

なお，同じ著者達によって，等間隔にサンプルされていない収益率データを用いて計算される“べき乗変動”(power variation) 過程に対する漸近分布理論の研究が，時間変更を利用してなされている（Barndorff-Nielsen and Shephard, 2004）．

6. 取引頻度の非均一性

最後に，（規則的，または不規則的に観測される）取引価格や収益率ではなく，不規則に並ぶ取引時点そのものに対するモデリングについて紹介しよう．市場で逐次売り買い注文のマッチングが行われる連続オークション（continuous auction）による取引は，ランダムな時刻に発生する．取引発生時点のモデル化や分析は，単に統計学的・計量経済学的な面白さや実務上の重要性などの観点のみならず，取引の発生メカニズムに焦点を当てる市場のマイクロストラクチャ理論の観点からも重要なテーマである．取引時間の分析やモデリングは，高頻度データが入手可能となって以来，理論研究，実証研究ともに飛躍的に発展している分野である．

取引などのイベントの発生時刻をモデル化するには，点過程によるアプローチが自然である．イベント時刻 $\{t_i, i = 1, 2, \ldots\}$, $0 \leq t_i < t_{i+1}$，を記録した単純点過程（ないしは，計数過程）を $N(t) := \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{t_i \leq t\}}$ によって定義する．ここでは，同時に二つのイベントが起こらないケースを考えている．隣り合う二つのイベントの発生間隔 $d_i = t_i - t_{i-1}$ をデュレーション（duration）と呼ぶことにする．

最も単純な点過程は単純ポアソン過程（simple Possion Process）である．周知のように，単純ポアソン過程は，(i) 独立かつ定常な増分（$N(t+s) - N(s)$）を持ち，強度過程 $\lambda(s)$ が一定（時間・空間に関して）であること，$\lambda(s) \equiv \lambda > 0$; (ii) 独立な増分を持ち，増分が Poisson 分布に従うこと，即ち，$(N(t+s) - N(s)) \sim Poisson(\lambda t)$; (iii) デュレーション列 $\{d_i\}$ が i.i.d. の指数分布（強度 λ）に従うこと，によって特徴付けられる．一般化は単純ポアソン過程を特徴付けるこれらの条件を緩和することによって行われる．

モデル化に際してのカギとなるのは，時間と共に変動する（確定的あるいはランダムな）強度過程を持つ点過程 $N(t)$ が時間変更済み単純ポアソン過程として表現できる事実である．

すなわち，取引時刻自体のランダム性は受容しつつも，その発生頻度の(時間的)非均質性を時間変更によって均質化しようとするものである．前節までのアプローチ，特に定理 2.3 を踏まえたものは確率過程のいわば“空間軸方向”への均質化 ── 収益率の変動性を時間変更によって均質化するもの ── であったので，本節との類似点や相違点は明らかである．

次のステートメントは，Daley and Vere-Jones (2003, p. 258, Proposition 7.4.I) による．

定理 6.1． $N=(N(t),0\le t<\infty)$ を $(\mathcal{F}_t)$-適合している単純点過程とする．さらに, N は有界かつ正の, $(\mathcal{F}_t)$ に関する条件付強度 $\lambda(t)$ と非有界なコンペンセーター (compensator) $\Lambda(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$ を持つとする．この時，時間変更 $t=\Lambda^{-1}(s)$ によって，時間変更済み過程

$$\widetilde{N}(s)=N(\Lambda^{-1}(s))$$

は単純ポアソン過程となる．

逆に，いま，フィルトレーション $(\mathcal{G}_t)$ と，有限，単調増加，連続なパスを持つ (a.s.) $(\mathcal{G}_t)$-適合な関数 $L(t)$，および $(\mathcal{G}_t)$-適合な単純ポアソン $N_0(t)$ があるとする．また，フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)$ を $\mathcal{F}_t=\mathcal{G}_{L(t)}$ によって定義する．この時，$N(t)=N_0(L(t))$ は $(\mathcal{F}_t)$-適合な単純点過程となり，$(\mathcal{F}_t)$-適合なコンペンセーター $L(t)$ を持つ．

定理の前半にある“条件付強度”に関しては，上記 Daley and Vere-Jones (2003) の 7 章の解説を参照せよ．特に，$(\mathcal{F}_t)$ が N の履歴 $\{t_i\}$ によって生成される場合が最も単純なケースであり，この時，$\lambda(t)$ は時点 t より前に発生した $\{t_i\}$ の関数として書かれる．一般には，$(\mathcal{F}_t)$ は $\{t_i\}$ のみならずその他の外生変数の情報を含んでもよい．なお，マルチンゲールの表現定理 2.3 における Knight の拡張定理のように，定理 6.1 に対しても，多変量バージョンが存在する (例, Daley and Vere-Jones, 2003, p. 261, Proposition 7.4.VI.)．

定理 6.1 より，$\Lambda(t)$ をコンペンセーターに持つ点過程 N の履歴 $\{t_i\}$ に対して，$\{\widetilde{t}_i=\Lambda(t_i)\}$ は単純ポアソン過程 $\widetilde{N}(t)$ の実現列となる．すなわち，$\widetilde{t}_i-\widetilde{t}_{i-1}=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\lambda(s)ds=:\Lambda(t_{i-1},t_i]$ は強度 1 を持つ指数確率変数の i.i.d. 列である．さらに，$\Lambda(t_{i-1},t_i]$ は，強度関数 $\lambda(t)$ と次の発生時点 (暦時間) までの期間の長さ (デュレーション) とを関連付けていることも明らかである．例えば，強度関数が 2 時点間で一定の場合，デュレーション d_i は $d_i=\Lambda(t_{i-1},t_i]/\lambda(t_{i-1})$ により与えられる．

よって，点過程をモデリングするには，イベントの発生時刻列をうまく表現出来るように，(i) 強度過程 λ (またはコンペンセーター Λ) にモデルを与える (直接的に時間変更を与える) か，(ii) デュレーション列 $\{d_i\}$ の発生の仕方にモデルを与える (間接的に時間変更を与える) のが自然なやり方であろう．勿論，(i)，(ii) のルート以外のモデリングもあり得る．

周知の通り，点過程を用いたモデリング・分析は統計学において (特に生存分析や地震学を中心に) 広く行われてきた (cf. Daley and Vere-Jones, 2003)．しかし，高頻度の金融時系列データの分析に際してはデータに特有な時間依存構造をモデルに組み入れる必要があるための工夫が必要となる．高頻度データに対する計量分析において，各取引を (ランダムな) 取引時間と取引価格や取引量などの時間に付随する特性量との組から成る，マーク付き点過程 (marked point process) としてアプローチすることの重要性を最初に説いたのは Robert Engle による 96 年にイスタンブールで開催された第 51 回 Econometric Society Meeting における講演であるとされている (Engle, 2000)．

取引時刻に対するモデリングにおいては，上記 (i) に対応するのが取引間隔に関するモデリング，(ii) が取引強度 (intensity) (＝単位時間当たり取引頻度) に関するモデリングである．既存文献においては，前者のタイプでは，取引間隔の系列に時系列構造を仮定する自己回帰条件付デュレーション (Autoregressive Conditional Duration, ACD) モデル (Engle and Russell, 1998)

が，後者のタイプでは，強度関数に時系列構造を仮定する自己回帰条件付強度（Autoregressive Conditional Intensity，ACI）モデル（Russell, 1999）が代表的な例である．また，取引時刻に付随するマーク（価格やその方向，収益率など）に対する時系列モデリングに関しても様々なアプローチが提案されている（例，Ghysels and Jasiak, 1998; Russell and Engle, 2005）．

なお，以上のモデルを推定する際には，まず U 字型現象などの 1 日内変動の確定的部分を除去してから，（残りの確率的部分に対して）モデルの推定を行うなどの対策がなされる．この操作は一日調整（diurnal adjustment）と呼ばれる．

(i) や (ii) のモデリングに関するレビューとしては，例えば林（2008）を参照せよ．

7. まとめ

リスク管理などの実務において，時間変更を組み込んだモデルを適用する際には，当然ながら，観察データからモデルを適切に推定せねばならない．それには，まず X と τ をどのようにモデル化するかが鍵となる．さらにそれに先立ち，（時間変更を用いたモデリングには限らないことではあるが）分析の目的やモデルの特性が十分に吟味されねばならない．すなわち，モデルがどこまで分析対象である現象を記述可能か，モデルがリスク管理や価格付けなど当面の目的に対してどこまで操作性や計算容易性があるか，モデルがどのような理論的帰結・含意を持ちそれが将来の予測やより望ましい意思決定につながるか，さらには，統計学的な側面 — データからの推定がどこまで容易かあるいはより望ましい推定方式が構成されるか，データに照らしてモデルが果たして妥当か，など多面的な検討が必要である．ファイナンス分野における既存研究は，本稿で取り上げた論文も含めて，もっぱら現象の記述性やオプション価格付けなどの応用可能性を動機としており，統計的推測の観点からの議論は多くはなされていないようである．高頻度データが容易に入手可能な今日，確率過程に対する統計的推測問題の研究者にとっても，容易ではないが有望な研究領域であろう．

マルチンゲールの表現定理に照らせば，時間変更は証券価格の時系列データを表現するのに極めて自然なアプローチであることを本文中で強調した．とりわけ，連続セミマルチンゲールのクラスは，応用上最も広く用いられているクラスである．その一方で，高頻度データ，特にティックデータにおいては，市場価格の離散性やビッド・アスク・バウンスなど，価格を連続セミマルチンゲール過程の離散観測と見なすという設定とは整合的でない現象も良く知られている．このような“マイクロストラクチャ・ノイズ”に汚染された証券価格系列に対する妥当なモデリングは何かという課題は，時間変更のみでは解決を図るのが困難な重要なテーマである．

本稿は，時間変更を利用したモデリング手法のうち，高頻度データの文脈で行われたものについての代表的と思われる事例の紹介であり，全ての重要事例を網羅したものではない．そもそも，モデリングは目的に応じて行われるものであるから，異なる目的を持って行われる高頻度データ分析のためのモデリング手法自体がバラエティに富んでおり，それらの整理と体系化は容易ではない．その点において本稿はサーベイとして未完のままであり，今後とも更なる作業が必要である．

Notes

[1] 例えば，Ikeda and Watanabe (1981, Ch. III, IV) は，(B1) (B3) (B4) (B5) (i, ii) を満たす $\phi=(\phi_t)$ を“時間変更過程”(process of time change) と呼んでいる．

[2] Skorokhod embedding 問題に関するサーベイ論文としては，Obloj (2004) を参照せよ．

[3] なお，佐藤（1991）は，subordination を“従属操作”と呼んでいる．本稿では，X と τ が独立でない（従属している）ケースを扱う既存研究も紹介していることから，混同を避けるため，

“劣後化”と呼ぶことにする．

[4] ファイナンスの文献において，収益率に対する混合正規性の仮説は“Clark 仮説”とも呼ばれる．

[5] 当論文 Geman and Ané (1996) には誤植と思われる表記が含まれていることから，本節では，若干表現方法を変更した．

[6] Drost and Nijman (1993) は，“strong” GARCH とも呼ばれる，通常の GARCH モデルに対しては一般に時間合算性が成立しないことを示した．GARCH モデルには，より広いクラスである “semi-strong” や “weak” GARCH モデルも導入され，特に，weak GARCH は，時間合算性が成立することが知られている(例，Breuer and Jandacka, 2007)．

[7] 原著における (4.2) から (4.6) の導出過程に，誤植と見られる箇所があったため，修正して記述した．

謝　辞

本稿の執筆にあたり，レフリーより有用なコメントを頂いた．本レヴューは，高頻度データに対する統計手法の研究の一貫として，日本学術振興会科学研究費(基盤研究(C)，No. 19530186)および石井記念証券研究振興財団研究調査助成金の資金援助のもとに行われた．ここに謝意を表する．

参　考　文　献

Admati, A. R. and Pfleiderer, P. (1988). A theory of intraday trading patterns, *Review of Financial Studies*, **1**, 3–40.

Ané, Thierry and Geman, Hélyette (2000). Order flow, transaction clock, and normality of asset returns, *Journal of Finance*, **55**, 2259–2284.

Applebaum, David (2004). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge.

Barndorff-Nielsen, Ole E. and Shephard, Neil (1998). Processes of normal inverse Gaussian type, *Finance and Stochastics*, **2**, 41–68.

Barndorff-Nielsen, Ole E. and Shephard, Neil (2002). Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models, *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, **64**, 253–280.

Barndorff-Nielsen, Ole E. and Shephard, Neil (2004). Power variation and time change (unpublished paper).

Barndorff-Nielsen, Ole E. and Shephard, Neil (2006). Impact of jumps on returns and realised variances: Econometric analysis of time-deformed Lévy processes, *Journal of Econometrics*, **131**, 217–252.

Bertoin, Jean (1996). *Lévy Processes*, Cambridge University Press, Cambridge.

Bochner, Salomon (1955). *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, 2nd ed., University of California Press, Berkeley, California.

Bollerslev, Tim and Ghysels, Eric (1996). On periodic autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Business and Economic Statistics*, **14**, 139–152.

Breuer, Thomas and Jandacka, Martin (2007). Temporal aggregation of GARCH models: Conditional kurtosis and optimal frequency, SSRN Working Paper.

Breymann, Wolfgang, Kelly, Leah and Platen, Eckhard (2006). Intraday empirical analysis and modeling of diversified world stock indices, *Asia-Pacific Financial Markets*, **12**(1), 1–27.

Carr, Peter P. and Wu, Liuren (2004). Time-changed Lévy and option pricing, *Journal of Financial Economics*, **71**, 113–141.

Carr, Peter, Geman, Hélyette, Madan, Dilip B. and Yor, Marc (2002). The fine structure of asset returns: An empirical investigation, *Journal of Business*, **75**(2), 305–332.

Carr, Peter, Geman, Hélyette, Madan, Dilip B. and Yor, Marc (2003). Stochastic volatility for Lévy processes, *Mathematical Finance*, **13**, 345–382.

Clark, Peter K. (1973). A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices, *Econometrica*, **41**, 135–155.

Conley, Timothy G., Hansen, Lars Peter, Luttmer, Erzo G. J. and Scheinkman, José A. (1997). Short-term interest rates as subordinated diffusions, *Review of Financial Studies*, **10**, 525–577.

Cont, Rama and Tankov, Peter (2004). *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

Dacorogna, Michel M., Müller, Ulrich A., Nagler, Robert J., Olsen, Richard B. and Pictet, Olivier V. (1993). A geographical model for the daily and weekly seasonal volatility in the foreign exchange market, *Journal of International Money and Finance*, **12**, 413–438.

Dacorogna, Michel M., Gençay, Ramazan, Müller, Ulrich A., Olsen, Richard B. and Pictet, Olivier V. (1998). Modelling short-term volatility with GARCH and HARCH models (eds. C. Dunis and B. Zhou), *Nonlinear Modelling of High Frequency Financial Time Series*, 161–176, John Wiley Sons, London.

Dacorogna, Michel M., Gençay, Ramazan, Müller, Ulrich A., Olsen, Richard B. and Pictet, Olivier V. (2001). *An Introduction to High-frequency Finance*, Academic Press, San Diego.

Daley, D. J. and Vere-Jones, D. (2003). *An Introduction to the Theory of Point Processes*, *Volume I*: *Elementary Theory and Methods*, Springer-Verlag, New York.

Delbaen, F. and Schachermayer, W. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing, *Mathematische Annalen*, **300**, 463–520.

Drost, F. C. and Nijman, T. E. (1993). Temporal aggregation of GARCH processes, *Econometrica*, **61**, 909–927.

Duffie, Darrell and Glynn, Peter (2004). Estimation of continuous-time Markov processes sampled at random time intervals, *Econometrica*, **72**, 1773–1808.

Engle, Robert F. (2000). The econometrics of ultra-high-frequency data, *Econometrica*, **68**(1), 1–22.

Engle, Robert F. and Russell, Jeffery R. (1998). Autoregressive conditional duration: A new model for irregularly spaced transaction data, *Econometrica*, **66**(5), 1127–1162.

Feller, William (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Application*, Volume II, Wiley, New York.

Gallant, A. Ronald, Rossi, Peter E. and Tauchen, George (1992). Stock prices and volume, *Review of Financial Studies*, **5**, 199–242.

Geman, Hélyette and Ané, Thierry (1996). Stochastic subordination, *Risk*, **9**, 145–149.

Geman, Hélyette, Madan, Dilip B. and Yor, Marc (2001). Time changes for Lévy processes, *Mathematical Finance*, **11**, 79–96.

Ghysels, Eric and Jasiak, Joanna (1994). Stochastic volatility and time deformation: An application to trading volume and leverage effects, Working Paper, CRDE.

Ghysels, Eric and Jasiak, Joanna (1998). GARCH for irregularly spaced financial data. The ACD-GARCH model, *Studies in Nonlinear Dynamics and Economics*, **2**(4), 133–149.

Ghysels, Eric, Gouriéroux, Christian and Jasiak, Joanna (1995). Trading patterns, time deformation and stochastic volatility in foreign exchange, Discussion Paper, CIRANO.

林　高樹(2008). 高頻度データと取引時間モデル,『慶應経営論集』, 第 25 巻, 23–37, 慶應義塾大学経営管理学会, 横浜.

Ikeda, Nobuyuki and Watanabe, Shinzo (1981). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo.

Jones, C., Kaul, G. and Lipson, M. (1994). Transactions, volume and volatility, *Review of Financial Studies*, **7**, 631–651.

Kallenberg, Olav (2002). *Foundations of Modern Probability*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.

Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.

Karpoff, Jonathan M. (1987). The relation between price changes and trading volume: A survey, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **22**(1), 109–126.

Knight, Frank B. (1971). A reduction of continuous square-integrable martingales to Brownian motion, *Lecture Notes in Mathematics*, **190**, 19–31.

Long, John B. (1990). The numeraire portfolio, *Journal of Financial Economics*, **26**, 29–69.

Madan, Dilip B. and Seneta, Eugene (1990). The Variance Gamma (V. G.) model for share market returns, *Journal of Business*, **63**, 511–524.

Madan, Dilip B., Carr, Peter P. and Chang, Eric C. (1998). The variance gamma process and option pricing, *European Finance Review*, **2**, 79–105.

Mandelbrot, Benoit (1963). The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, **36**, 394–411.

Mandelbrot, Benoit and Taylor, Howard M. (1967). On the distribution of stock prices differences, *Operations Research*, **15**, 1057–1062.

Mantegna, Rosario N. and Stanley, H. Eugene (1995). Scaling behaviour in the dynamics of an economic index, *Nature*, **376**, 46–49.

Monroe, Itrel (1978). Processes that can be embedded in Brownian motion, *Annals of Probability*, **6**, 42–56.

Müller, Ulrich A., Dacorogna, Michel M., Davé, Rakhal D., Olsen, Richard B., Pictet, Olivier V. and von Weizsäcker, Jacob E. (1997). Volatilities of different time resolutions—Analyzing the dynamics of market components, *Journal of Empirical Finance*, **4**, 213–239.

Obloj, Jan (2004). The Skorokhod problem and its offspring, Preprint, PMA 886, Université Paris VI & Université Paris VII.

Platen, Eckhard and Heath, David (2006). *A Benchmark Approach to Quantitative Finance*, Springer-Verlag, Berlin.

Richardson, M. and Smith, T. (1994). A direct test of the mixture of distributions hypothesis: Measuring the daily flow of information, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **29**, 101–116.

Russell, Jeffery R. (1999). Econometric modeling of multivariate irregularly-spaced high-frequency data, Working paper, University of Chicago.

Russell, Jeffery R. and Engle, Robert F. (2005). A discrete-space continuous-time model of financial transaction prices and times: The ACM-ACD model, *Journal of Business and Economic Statistics*, **23**(2), 166–180.

佐藤健一(1991).『加法過程』, 紀伊國屋書店, 東京.

Sato, Ken-Iti (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distribution*, Cambridge University Press, Cambridge.

Schoutens, Wim (2003). *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, Wiley, Chichester.

Shiryaev, Albert N. (1999). *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Scientific, Singapore.

Stock, James H. (1988). Estimating continuous-time processes subject to time deformation, *Journal of American Statistical Association*, **83**, 77–85.

Tauchen, George E. and Pitts, Mark (1983). The price variability-volume relationship on speculative markets, *Econometrica*, **51**(2), 485–505.

Winkel, Matthias (2001). The recovery problem for time-changed Lévy processes, MaPhySto Research Report, Center for Mathematical Physics and Stochastics, Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus, Aarhus C.

Zhou, Bin (1998). F-consistency, de-volatilization and normalization of high-frequency financial data, *Nonlinear Modelling of High Frequency Financial Time Series* (eds. C. Dunis and B. Zhou), 109–123, John Wiley & Sons, London.

Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics Vol. 57, No. 1, 39–65 (2009)

Financial Models of High-frequency Data Using Time Change: A Review

Takaki Hayashi

Graduate School of Business Administration, Keio University

This article reviews approaches to financial modelling based on the method of time change in the field of high-frequency data analysis.

Key words: High-frequency data, time change.