

# 実現多重指数変動に基づく第二特性量行列の推定

増田 弘毅<sup>†</sup>

(受付 2008 年 6 月 23 日 ; 改訂 2008 年 10 月 1 日)

## 要 旨

高頻度離散時点で観測される確率過程に対して定義される実現多重指数変動 (realized multipower variation, MPV) は, 古典的な実現二次変動の一つの拡張に相当する. 本稿ではジャンプを持つ多次元セミマルチンゲールのある部分族を対象とし, MPV による第二特性量行列, 特にその非対角成分の一次推定を考える. まず MPV の漸近挙動に関する先行研究を概観し, 次に MPV を介して定義される一致推定量に関する安定型中心極限定理を定式化する. 帰結として, 1 次元の場合の先行研究と同様に第二特性量行列の推定の信頼領域の直接的な構成が可能となる.

キーワード: 安定型中心極限定理, 有限個のジャンプを持つ多次元セミマルチンゲール, 実現多重指数変動, 第二特性量行列の推定.

## 1. 序論

近年, 確率過程  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  に対して定義される実現多重指数変動 (realized multipower variation, 略して MPV) に関する極限定理の登場に伴い, 高頻度な離散時点データに基づいた統計的漸近推測が新たな注目を集めた.  $X$  が 1 次元の場合, MPV の最も典型的な物は所与の定数  $m \in \mathbb{N}$  と  $r > 0$  に対して

$$(1.1) \quad \sum_i |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^r \cdots |\Delta_{i+m-1}^n X|^r$$

なる形を通じて定義される. ここで

$$\Delta_i^n X = X_{i/n} - X_{(i-1)/n}$$

は時間軸上  $1/n$  等間隔で離散観測された  $X$  の増分を表し, また,  $i$  に関する和は利用可能なデータ全てを尽くすようにとる. 特に  $m=1$  であれば (1.1) は実現  $r$  次変動と呼ばれ, これは元々は標本路  $t \mapsto X_t$  の性質を解析する目的で導入された概念である. これについては, Dudley and Norvaiša (1999a, 1998b) に詳しい参考文献一覧が与えられている. 最近 Jacod (2007, 2008) が実現  $r$  次変動の漸近挙動に関する包括的な結果を与えた. 更に  $m=1$  かつ  $r=2$  の場合, (1.1) は確率過程論において重要な役割を演じる実現二次変動 (realized quadratic variation, 略して QV) として古くから知られている. 他方,  $m \geq 2$  の場合の MPV に関する極限定理の一般論が整備されだしたのは最近のことである. 関連する先行研究については, 本節において適宜後述していくことにする.

---

<sup>†</sup>九州大学大学院 数理学研究院 : 〒812-8581 福岡県福岡市東区箱崎 6-10-1

### 1.1 目的

本稿の目的は、MPV の応用として、有限個のジャンプを持つ多次元セミマルチンゲールの第二特性量行列の簡単な一次推定方式を定式化することにある。

多次元確率過程  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  をセミマルチンゲールとし、適当な条件を満たす確率関数  $(b, \sigma)$ 、およびウィーナー過程  $w$  に対して

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dw_s + \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s$$

と表されているとしよう。ここで右辺第三項は伊藤積分、また第四項は  $X$  の  $(0, t]$  でのジャンプ  $\Delta X_s := X_s - \lim_{u \rightarrow s, u < s} X_u$  による変動の累積和であり、その収束は仮定している。 $X$  の連続局所マルチンゲール部分

$$X_t^{(c)} := \int_0^t \sigma_s dw_s$$

は  $X$  の“非常に速く(細かく)変動する部分”に相当し、

$$\langle X^{(c)} \rangle_t = [\langle X^{(c)} \rangle_t^{k,k'}]_{k,k'} := \int_0^t \sigma_s^{\otimes 2} ds$$

は  $X_t^{(c)}$  の二次変動、または  $X_t$  の(局所)第二特性量行列と呼ばれる(ここで  $\sigma_s^{\otimes 2} := \sigma_s \sigma_s^\top$  で、 $\sigma_s^\top$  は  $\sigma_s$  の転置を表す);  $\langle X^{(c)} \rangle_t$  はしばしば期間  $[0, t]$  での  $X$  の累積ボラティリティとも呼ばれる。特に  $(b, \sigma)$  が非確率的な関数でしかも  $\Delta X = 0$  であれば  $\langle X^{(c)} \rangle_t$  は  $X_t$  の分散そのものであり、また、 $\sigma$  と  $w$  が独立であれば  $\langle X^{(c)} \rangle_t$  は  $X_t^{(c)}$  の  $(\sigma_s)_{s \in [0, t]}$ -条件付分散である。 $\langle X^{(c)} \rangle_t$  は  $X$  の連続の変動によって生じるリスクの一つの指標であり、従って、リスクの管理の観点から行列  $\langle X^{(c)} \rangle_t$  の推定および予測は重要である。

今、 $X$  から離散時点データ系列

$$(1.2) \quad X_0, X_{1/n}, X_{2/n}, \dots, X_{([nt]-1)/n}, X_{[nt]/n}$$

が得られているとしよう。ここで  $t > 0$  は固定された定数で、 $[nt]$  は  $nt$  の整数部分を表す。我々の目的は、特にジャンプが  $[0, t]$  上で有限回しか生じない場合に、適当な条件の下で

$$(\hat{V}_t^n)^{-1/2} \sqrt{n} \{ \text{vech}(\langle X^{(c)} \rangle_t^n) - \text{vech}(\langle X^{(c)} \rangle_t) \}$$

の極限分布が多次元標準正規分布となるような統計量の列  $(\langle X^{(c)} \rangle_t^n, \hat{V}_t^n)$  を明示的に構成することである(vech 作用素を施しているのは  $\langle X^{(c)} \rangle_t$  の対称性から生じる極限の退化を避けるため)。これは形式的には、連続セミマルチンゲールに対する Barndorff-Nielsen and Shephard (2004a, 2004b) の結果を有限個のジャンプを持つセミマルチンゲールへ拡張したものに相当する。この分布近似に基づき、 $\langle X^{(c)} \rangle_t$  の推定の信頼領域の直接的な構成が可能となる。

データ(1.2)が得られる状況では  $t$  を“現時点”とみなしてよい。 $\langle X^{(c)} \rangle_t$  は  $(\sigma_s^{\otimes 2})_{s \in [0, t]}$  の汎関数であり、時間軸上では  $\langle X^{(c)} \rangle_t$  は“現時点で既に確定している量”であるが、漸近理論の展開に際してはそれを確率変数として扱わねばならない事に注意しよう。我々の目的は“ $\langle X^{(c)} \rangle_t$  の値”の推定であり、“ $\langle X^{(c)} \rangle_t$  の分布”の推定ではない。

本稿では記号を簡潔にするために  $X$  が二次元であると仮定し、

$$(1.3) \quad \theta_t := (\langle X^{(c)} \rangle_t^{11}, \langle X^{(c)} \rangle_t^{21}, \langle X^{(c)} \rangle_t^{22})$$

の推定を考えることにする。 $X$  の次元が  $d \geq 3$  でも本質的な違いは生じない(第5節参照)。 $X$  が1次元の場合には上記の目的は既に Barndorff-Nielsen et al. (2006c) によって達成されており、我々の主眼は特に非対角要素  $\langle X^{(c)} \rangle_t^{21}$  まで込めた一次推定にある。本稿で扱う推定量((3.3)式

参照)は Barndorff-Nielsen and Shephard (2004c, 2005b)などで既に言及されているものであり、その一致性は既に認識されているが、漸近分布まで明示的に導出してある文献は見当たらない。

次節へ移る前に、我々の目的に際して本質的となる安定型分布収束の概念について簡単に注意しておこう。詳細については、Aldous and Eagleson (1978)および Jacod (1997)を参照されたい。

$X$  が定義されている確率基底を  $\mathbb{P} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$  と書く。  $\mathbb{P}$  上で定義された確率ベクトルの列  $(\zeta_n) \subset \mathbb{R}^r$ 、および  $\mathbb{P}$  のある拡張  $\tilde{\mathbb{P}} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{P})$  上の確率ベクトル  $\zeta \in \mathbb{R}^r$  について、任意の有界連続関数  $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  と任意の有界  $\mathcal{F}$ -可測確率変数  $\eta$  に対して

$$E[\eta f(\zeta_n)] \rightarrow \tilde{E}[\eta f(\zeta)]$$

が成り立つとき、 $\zeta_n$  は  $\zeta$  に安定型分布収束(厳密には  $\mathcal{F}$ -安定型分布収束)すると言う。本稿ではこれを

$$\zeta_n \xrightarrow{d(\mathcal{F})} \zeta$$

と表記する。これは通常の分布収束( $\eta=1$  に対応)よりも強い収束であることに注意されたい。我々の目的において重要なのは、 $\zeta_n \xrightarrow{d(\mathcal{F})} \zeta$  の定義そのものというよりは、その帰結として以下の収束が得られる点である。即ち、 $\zeta_n \xrightarrow{d(\mathcal{F})} \zeta$  であれば、 $\mathbb{P}$  上の任意の確率ベクトル  $\xi_n, \xi$  で  $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$  を満たすものに対して同時収束

$$(\zeta_n, \xi_n) \xrightarrow{d(\mathcal{F})} (\zeta, \xi)$$

が従う( $\zeta_n \xrightarrow{d(\mathcal{F})} \zeta$  を単なる分布収束  $\zeta_n \xrightarrow{d} \zeta$  に緩めてしまうと、 $\zeta$  と  $\xi$  が共に確率変動する場合には上記の同時収束は一般には結論付けられない)。特に  $\xi_n, \xi \in \mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^r$  で  $\xi$  が正則( $P$ -a.s.)であり、更に  $\mathcal{F}$  と独立な標準正規分布に従う確率ベクトル  $z \in \mathbb{R}^r$  に対して  $\zeta = \xi^{1/2} z$  と表現されていれば

$$\xi_n^{-1/2} \zeta_n \xrightarrow{d(\mathcal{F})} z$$

が従う。換言すれば、適当な確率変数列による規格化で極限分布を正規分散混合分布から標準正規分布へ変換するという形式的操作が理論的に保証されるのである(安定型中心極限定理)。この手法は、統計では非エルゴード的モデルの推測問題などにおいて古くから適用されている。

後で第3節で見るように、我々の文脈においては  $\mathcal{F}$  と独立な3次元標準正規確率変数  $\eta$ 、ある  $\mathcal{F}_t$ -可測確率変数  $V_t \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ 、および  $\theta_t$  の一致推定量  $\hat{\theta}_t^n$  に対して

$$(1.4) \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_t^n - \theta_t) \xrightarrow{d(\mathcal{F})} V_t^{1/2} \eta$$

が成り立つ。 $V_t$  の明示的な表現は(3.6)で与えられる。

## 1.2 研究背景

ここでは第二特性量の推定に関する先行研究を概観していく。本節で挙げる参考文献の大半を含む、より包括的な文献リストが <http://www.nuffield.ox.ac.uk/users/shephard/levy/> に掲載されているので、興味のある方は併せて参照されたい。

### 1.2.1 連続セミマルチンゲールの場合

まず、 $X$  が連続セミマルチンゲール、即ち  $\Delta X = 0$  で標本路  $t \mapsto X_t$  が連続な場合には多次元の枠組みで結果が得られている。この場合には、各  $t > 0$  に対して QV の基本的な性質

$$(1.5) \quad \sum_{i=1}^{[nt]} (\Delta_i^n X)^{\otimes 2} \xrightarrow{p} \langle X^{(c)} \rangle_t$$

を直接的に適用できる：大抵の場合，高頻度データの設定 (1.2) の下では  $n$  が大きいとき  $i \leq [nt]$  について一様な確率評価

$$\begin{aligned}\Delta_i^n X &= \int_{(i-1)/n}^{i/n} b_s ds + \int_{(i-1)/n}^{i/n} \sigma_s dw_s \\ &= O_p(1/n) + O_p(1/\sqrt{n})\end{aligned}$$

が得られ，従って  $\{\sqrt{n}\Delta_i^n X\}_{i \leq [nt]}$  だけを見ていけば漸近的に連続局所マルチンゲール部分の情報のみを取り出せる．これは離散時間時系列の設定と大きく異なる点である．(1.4) における  $V_t$  の表現およびその一致推定量の構成の詳細については Barndorff-Nielsen and Shephard (2004a, 2004b) を参照されたい．連続セミマルチンゲールの場合，第二特性量の対角要素の推定については，MPV の中では理論上 QV が漸近分散の意味で最も良いことが知られている．

(1.5) は確率過程論においては古くから知られている事実であり，例えば拡散過程に関する推測の分野においてもその有用性が以前から認識されているが，計量経済の分野における累積ボラティリティ推測への有用性の認識が動機となり，二十世紀終盤以降に改めて注目を集めることとなったようである．(1.5) の適用において  $b$  を局外母数とみなせること，および  $\sigma$  の具体的な確率構造の明確化が要求されないことによる汎用性の高さが，その要因であると言えよう．

### 1.2.2 ジャンプがある場合

さて， $X$  がジャンプを有する場合，QV の漸近挙動 (1.5) は一般に

$$(1.6) \quad \sum_{i=1}^{[nt]} (\Delta_i^n X)^{\otimes 2} \rightarrow^p \langle X^{(c)} \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^{\otimes 2}$$

に変わり，従って  $[0, t]$  においてジャンプが生じた場合には QV は  $\langle X^{(c)} \rangle_t$  の一致推定量にはならない．つまり，QV 単体では連続部分とジャンプ部分の変動の情報を“個別には”抽出できないことになる．この事実を踏まえ，QV の実装容易性を保持しつつ連続変動の情報のみを抽出する手段として MPV が脚光を浴びる運びとなった．

突発的かつ比較的稀なジャンプが介在した場合，ジャンプ変動そのものの推定および予測は不安定となり得よう．ジャンプ変動を無視しつつ第二特性量を単独で推定する手法としては，現在のところ主として以下の二種に大別される：

- (a) MPV の適用；
- (b) ジャンプ時点検出フィルターの適用．

まず (a) の MPV 利用型は，大雑把に言えばジャンプ変動を漸近的に“小さく抑えて無視する”方法である (第 2.5 節参照)．従ってジャンプの頻度があまりに大きい場合には，有限標本においてはそれだけ大きなバイアスを持つことになる．Barndorff-Nielsen et al. (2006c) や Woerner (2006) による 1 次元  $X$  の場合の先行研究と同様に，我々の主目的には  $m \geq 3$  が必要となる．

元々，MPV は“希なジャンプ変動に対して頑健に累積ボラティリティを推定する”目的の他，“区間  $[0, t]$  において少なくとも 1 回ジャンプが生じたか否かを検定する”ための道具として導入された (Barndorff-Nielsen and Shephard, 2004c, 2006a 参照)．(b) のジャンプ検出フィルター利用型は，より精密に“各  $((i-1)/n, i/n]$  においてジャンプが生じたか否か”をデータから判断し，ジャンプが検出された微小区間上の増分を除いて構成した QV を用いる手法である．これは主として，Gobbi and Mancini (2006, 2007, およびそこでの参考文献) にあるように  $X^{(c)}$  の標本路の連続度の性質に基づいて構成されるが，フィルターの定式化には様々な可能性があり，例えば最近 Lee and Mykland (2007) はジャンプがない場合での増分列の最大値の漸近分布

に着目し、新しいジャンプ検出法を提案している。いずれにしても、(b)において決定的に重要となるのがジャンプ検出フィルター列の具体的な選択方法である。例えばジャンプ付拡散過程のようにより明確化されたモデルに対するジャンプ検出フィルターを介した推定に関し、清水(2009)とその参考文献の中で、フィルター(増分のサイズの閾値)の選択如何では有限標本の場合において全く異なった推定結果が導かれ得るという経験的警告がなされている。理論的に許容されるフィルターの範疇でも選択肢が無数に存在し、しかも物によって有限標本での推定精度に違いが生じるという点がフィルター構成の更なる研究に拍車を掛けているのが現状である。フィルターの選択において要求される無限次元微調整係数の決定は、MPV型での  $m$  の選択(有限次元微調整係数、第3節参照)とは質的に異なる要請である。

以下、第2節ではMPVに関する基本的な極限定理を準備し、第3節で本稿の主眼である第二特性量行列の一次推定に関する結果を述べる。続く第4節では簡単な数値実験例を紹介する。最後に第5節で結語を述べ、また幾つかの最近の関連する諸結果を簡単に紹介する。

## 2. 実現多重指数変動過程の漸近挙動

本節ではMPVの基本的な族を導入し、その漸近挙動を導出する。道具としては、本質的にBarndorff-Nielsen et al. (2006a, 2006b)の結果を利用する。連続セミマルチンゲール部分に関する本稿の仮定はこれらの論文と全く同様のものであるが、便宜上、完全な形で記述しておくことにする。

### 2.1 モデル設定

確率基底  $\mathbb{P} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F})_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$  上に以下の形の  $r$  次元セミマルチンゲール  $Y = (Y^k)_{k \leq r}$  が定義されているとする:

$$(2.1) \quad Y_t^k = Y_0^k + \int_0^t a_s^k ds + \sum_{j=1}^{r'} \int_0^t \gamma_{s-}^{kj} dw_s^j + \sum_{0 < s \leq t} \Delta Y_s^k.$$

ここで  $w = (w^j)_{j \leq r'}$  は  $r'$  次元標準ウィーナー過程、 $a = (a^k)_{k \leq r}$  は可予測過程、 $\gamma = (\gamma^{kj})_{k \leq r, j \leq r'}$  は右連続かつ各点で左極限を持つ適合過程、 $Y_0$  は  $\mathcal{F}_0$ -可測な確率ベクトルである。本節を通じて、 $t > 0$  を一つ固定しておく。

(2.1)の形に加え、更に  $Y$  のジャンプ回数が  $[0, t]$  上有限であることを仮定する:

$$(2.2) \quad P[\#\{s \in [0, t] : \Delta Y_s \neq 0\} < \infty] = 1.$$

例えば、ある計数過程  $N$  と確率変数列  $\zeta_i$  について  $\sum_{0 < s \leq t} \Delta Y_s = \mathbf{1}_{\{N_t \geq 1\}} \sum_{i=1}^{N_t} \zeta_i$  のように書ける全ての場合を対象とできる; ここで  $\mathbf{1}_A$  は事象  $A \subset \Omega$  の指示関数を表す。

この場合、 $N$  の強度過程はランダムなものでもよく、その正確な構造は仮定しない。また、ウィーナー過程  $w$  と  $Y$  のジャンプ部分  $\sum_{0 < s \leq t} \Delta Y_s$  は互いに相関を持ってよい。

MPVの安定型分布収束極限の導出に際して、 $\gamma$ の構造に更なる仮定を二つ用意する:

$$(2.3) \quad \text{各 } (\omega, s) \in \Omega \times [0, t] \text{ について } \gamma_t^{\otimes 2} \text{ は正則};$$

$$(2.4) \quad \gamma_t = \gamma_0 + \int_0^t a'_s ds + \int_0^t \gamma'_{s-} dw_s + \int_0^t \gamma''_{s-} d\tilde{w}_s \\ + \int_0^t \int_E h \circ \delta(s-, z) (\mu - \nu)(ds, dz) + \int_0^t \int_E (\delta - h \circ \delta)(s-, z) \mu(ds, dz).$$

ここで  $\tilde{w}$  は  $w$  と独立な  $\mathbb{R}^{r''}$  次元ウィーナー過程、 $\mu$  は強度測度  $\nu(ds, dz) = dsF(dz)$  を持つポアソン配置で  $F$  は  $(0, \infty) \times E$  上の  $\sigma$ -有限測度 ( $(E, \mathcal{E})$  は可分完備な距離付け可能な位相空間)、 $a'$ ,

$\gamma', \gamma''$  は各々  $\mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^{r'}$ ,  $\mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^{r'} \otimes \mathbb{R}^{r'}$ ,  $\mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^{r'} \otimes \mathbb{R}^{r''}$  に値をとる右連続かつ各時点で左極限を持つ適合過程, また  $\delta: \Omega \times [0, \infty) \times E \rightarrow \mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^{r'}$  は右連続かつ各時点で左極限を持つ適合過程で, 以下の二つの条件をみたすものである: 各  $s$  について  $\delta(s, z) = \delta(\omega; s, z)$  が  $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{E}$ -可測; ある確定的な関数列  $\psi_k(z)$  で  $\int_E \{1 \wedge \psi_k(z)^2\} F(dz) < \infty$  なるもの, およびある  $S_k \rightarrow \infty$  a.s. なる停止時の列  $(S_k)$  に対して  $\sup_{\omega \in \Omega, s < S_k(\omega)} |\delta(\omega; s, z)| \leq \psi_k(z)$  が成り立つ. 最後に,  $h$  は  $\mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^{r'}$  上のコンパクトな台を持つ連続関数で, 原点のある近傍で恒等写像となるものである.

$\gamma$  に関する仮定 (2.3) および (2.4) は, 安定型分布収束定理の証明で現れる誤差項の評価に用いられる.

結果として, 例えばウィーナー過程と複合ポアソン過程で駆動されるジャンプ付拡散過程など,  $Y$  としては広範なモデル族をカバーできる.  $\gamma$  としては例えば, ジャンプ付拡散過程およびそれらの重ね合わせが適用できる: 独立な確率過程の重ね合わせは柔軟な自己相関構造を入れる簡便な手段としてよく知られており, 例えば Barndorff-Nielsen et al. (1998) において分かり易く解説されている.

## 2.2 本稿で扱う MPV の定義

以下では  $m, m_0 \in \mathbb{N}$  を固定し, 極限の記号は断りなく  $n \rightarrow \infty$  に対して用いる. 各  $l \in \{1, 2, \dots, m\}$  と  $k \in \{1, 2, \dots, m_0\}$  に対し,  $g_l^k$  を可測関数とする. 本稿で扱う MPV の一般形は, 以下で定義される  $m_0$  次元確率変数  $M_t^n(g; Y) = \{M_t^n(g; Y)^k\}_{k \leq m_0}$  である:

$$(2.5) \quad M_t^n(g; Y)^k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \prod_{l=1}^m g_l^k(\sqrt{n} \Delta_{i+l-1}^n Y).$$

これは行列値関数  $g := (g_l^k)$  によって定まる  $Y$  の統計量である. 第 2.4 節で分布論まで定式化するには  $g$  により具体的な形を入れる.

Barndorff-Nielsen et al. (2006a, 2006b) の MPV 版として一般の行列値可測関数  $G_l: \mathbb{R}^{r_l} \otimes \mathbb{R}^{r_l+1}$  ( $r_l \in \mathbb{Z}_+$ ) で定まる統計量

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \prod_{l=1}^m G_l(\sqrt{n} \Delta_{i+l-1}^n Y) \in \mathbb{R}^{r_1} \otimes \mathbb{R}^{r_{m+1}}$$

を見ていくことも可能であるが, これは結局は (2.5) の形のものの線形和に帰着される.

## 2.3 MPV に関する大数の法則

$y \mapsto \phi(y; V)$  で平均 0 および共分散行列  $V$  の正規分布の密度関数を表し,

$$\rho_{\gamma_s}(g_l^k) = \int_{\mathbb{R}^r} g_l^k(y) \phi(y; \gamma_s^{\otimes 2}) dy = \int_{\mathbb{R}^{r'}} g_l^k(\gamma_s y) \phi(y; I_{r'}) dy$$

と書く. ここで  $I_{r'} \in \mathbb{R}^{r'} \otimes \mathbb{R}^{r'}$  は単位行列を表す.

以下の定理は本質的に Barndorff-Nielsen et al. (2006a, 2006b, 2006c) による.

**定理 2.1.** (2.1) と (2.2) を仮定し, 更に各  $(k, l)$  に対してある定数  $\alpha_{k,l} \geq 0$  および  $c_{k,l} > 0$  がとれ,

$$(2.6) \quad 0 < \alpha := \max_{k \leq m_0, l \leq m} \alpha_{k,l} < 2,$$

かつ  $g_l^k$  は連続で任意の  $y \in \mathbb{R}^r$  について

$$(2.7) \quad |g_l^k(y)| \leq c_{k,l} (1 + |y|^{\alpha_{k,l}})$$

が成り立っているとす。このとき

$$(2.8) \quad M_t^n(g; Y) \rightarrow^P M_t(g; \gamma) = \{M_t(g; \gamma)^k\}_{k \leq m_0} := \left[ \int_0^t \left\{ \prod_{l=1}^m \rho_{\gamma_s}(g_l^k) \right\} ds \right]_{k \leq m_0}$$

が成り立つ。ここで  $\rightarrow^P$  は確率収束を表す。

**注意 2.2.** 今  $t > 0$  を固定した状況であるが、実際には確率収束 (2.8) は局所一様に成り立つ。即ち、各  $T > 0$  について  $\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^n(g; Y) - M_t(g; \gamma)| \rightarrow^P 0$  が示せる。

**注意 2.3.** 定理 2.1 の条件において特に重要なのは (2.6) である。  $\alpha_{k,l} \geq 2$  なるものが存在してしまうと、ジャンプの影響を無視できなくなり、連続部分の情報のみを単独に抽出することはできない。  $\sum_{0 < s \leq t} \Delta Y_s = 0$  の場合には (2.6) は不要であり、(2.7) は“ $g$  が高々多項式的な増大を持つ連続関数”でよい。

第 2.5 節において、定理 2.1 および次節の定理 2.4 の証明の概略を述べる。

#### 2.4 MPV に関する安定型中心極限定理

$M_t^n(g, Y)$  の安定型分布収束極限の陽な表示を与えよう。便宜上、 $a > b$  に対しては  $\sum_{i=a}^b x_i = 0$ 、 $\prod_{i=a}^b x_i = 1$  と定義しておく。

**定理 2.4.** (2.1), (2.2), (2.3) および (2.4) を仮定し、更に各  $(k, l)$  についてある定数  $\alpha_{k,l}$  がとれて

$$(2.9) \quad 0 < \alpha := \max_{k \leq m_0, l \leq m} \alpha_{k,l} < 1,$$

かつ  $g_l^k(y) = |y|^{\alpha_{k,l}}$  であるとする。このとき  $\mathbb{P}$  のある拡張上で定義された  $m_0$  次元標準ウィナー過程  $w' = (w'^j)_{j \leq m_0}$  がとれて、

$$(2.10) \quad \sqrt{n} \{M_t^n(g; Y) - M_t(g; \gamma)\} \rightarrow^{d(\mathcal{F})} \left[ \sum_{j \leq m_0} \int_0^t u_s^{kj} dw_s'^j \right]_{k=1}^{m_0}$$

が成り立つ。ここで  $u = (u^{kj})$  は  $w'$  と独立な  $\mathbf{F}$  適合確率過程であり、極限の二次変動  $U_t = (U_t^{kk'}) \in \mathbb{R}^{m_0} \otimes \mathbb{R}^{m_0}$  は、各  $k, k' \in \{1, 2, \dots, m_0\}$  について

$$(2.11) \quad \begin{aligned} U_t^{kk'} &= \sum_{j \leq m_0} \int_0^t u_s^{kj} u_s^{k'j} ds \\ &:= \int_0^t \left[ \prod_{l=1}^m \rho_{\sigma_s}(g_l^k g_l^{k'}) - (2m-1) \prod_{l=1}^m \rho_{\sigma_s}(g_l^k) \rho_{\sigma_s}(g_l^{k'}) \right. \\ &\quad + \sum_{q=1}^{m-1} \left\{ \left( \prod_{l=1}^{m-q} \rho_{\sigma_s}(g_l^{k'}) \right) \left( \prod_{l=m-q+1}^m \rho_{\sigma_s}(g_l^{k'} g_{l-m+q}^k) \right) \left( \prod_{l=q+1}^m \rho_{\sigma_s}(g_l^k) \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \prod_{l=1}^{m-q} \rho_{\sigma_s}(g_l^k) \right) \left( \prod_{l=m-q+1}^m \rho_{\sigma_s}(g_l^k g_{l-m+q}^{k'}) \right) \left( \prod_{l=q+1}^m \rho_{\sigma_s}(g_l^{k'}) \right) \right\} \right] ds \end{aligned}$$

で与えられる。更に  $U_t$  が  $P$ -a.s. で正則であれば、 $\mathcal{F}$  と独立な  $\mathcal{N}_{m_0}(0, I_{m_0})$ -確率変数  $\eta$  に対して安定型中心極限定理

$$(2.12) \quad U_t^{-1/2} \sqrt{n} \{M_t^n(g; Y) - M_t(g; \gamma)\} \rightarrow^{d(\mathcal{F})} \eta$$

が従う. また, 統計量

$$\begin{aligned}
\hat{U}_t^{kk',n} := & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \prod_{l=1}^m g_l^k(\sqrt{n}\Delta_{i+l-1}^n Y) g_l^{k'}(\sqrt{n}\Delta_{i+l-1}^n Y) \\
& - (2m-1) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \prod_{l=1}^m g_l^k(\sqrt{n}\Delta_{i+2l-2}^n Y) g_l^{k'}(\sqrt{n}\Delta_{i+2l-1}^n Y) \\
& + \sum_{q=1}^{m-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \left\{ \left( \prod_{l=1}^{m-q} g_l^{k'}(\sqrt{n}\Delta_{i+l-1}^n Y^{k'}) \right) \right. \\
& \quad \cdot \left( \prod_{l=m-q+1}^m g_l^{k'}(\sqrt{n}\Delta_{i+l-1}^n Y^{k'}) g_{l-m+q}^k(\sqrt{n}\Delta_{i+l-1}^n Y^k) \right) \\
& \quad \cdot \left( \prod_{l=m+1}^{2m-q} g_{l-m+q}^k(\sqrt{n}\Delta_{i+l-1}^n Y^k) \right) \\
& \quad + \left( \prod_{l=1}^{m-q} g_l^k(\sqrt{n}\Delta_{i+l-1}^n Y^k) \right) \\
& \quad \cdot \left( \prod_{l=m-q+1}^m g_l^k(\sqrt{n}\Delta_{i+l-1}^n Y^k) g_{l-m+q}^{k'}(\sqrt{n}\Delta_{i+l-1}^n Y^{k'}) \right) \\
& \quad \cdot \left. \left( \prod_{l=m+1}^{2m-q} g_{l-m+q}^{k'}(\sqrt{n}\Delta_{i+l-1}^n Y^{k'}) \right) \right\}
\end{aligned}$$

は  $U_t^{kk'} \xrightarrow{p} U_t^{kk'}$  をみたし,

$$(\hat{U}_t^n)^{-1/2} \sqrt{n} \{M_t^n(g; Y) - M_t(g; \gamma)\} \mathbf{1}_{\{\hat{U}_t^n > 0\}} \xrightarrow{d(\mathcal{F})} \eta$$

が成り立つ.

定理 2.4 は,  $m=2$  の場合を扱った Barndorff-Nielsen et al. (2006a, Theorem 2.3) を一般の  $m$  次 MPV の設定まで広げたものであるが, ここではジャンプ項の影響を漸近的に無視するために  $g$  について同論文よりも強い仮定を課している. 特に  $k=k'$  の場合の  $U_t^{kk}$  の表現は Barndorff-Nielsen et al. (2006a, p.43, 第一段落) においてより詰めた形で与えられているが, 本稿第 3 節において第二特性量の非対角要素まで込めた一次推定を定式化する際には, Barndorff-Nielsen et al. (2006a, p.43, 第一段落) を  $k \neq k'$  の場合まで扱えるように拡張した表現 (2.11) が必要となる. 第 3.3 節で言及するように, 我々の目的には実際  $m \geq 3$  が必要となる.

**注意 2.5.**  $m=2$  かつ  $\Delta Y=0$  の場合, 定理 2.4 は Barndorff-Nielsen et al. (2006a, 2006b) における  $g$  および  $h$  が対角行列の場合に帰着する. 同文献は  $g_l^k(y) = |y^k|^{\alpha_{k,l}}$  を含むより広い偶関数を対象とできる設定をとっているが,  $g$  についての条件の記述は見かけ上複雑なものになる. 連続セミマルチンゲールの場合においては, 偶関数とは限らない  $g$  に対しても代わりに大域的な微分可能性を課すことで安定分布収束定理を導出できるが, 極限分布は正規分散混合分布をランダムに平行移動したものになる (詳細は Kinnebrock and Podolskij, 2007 を参照されたい).



## 2.5 定理 2.1, 2.4 の証明の概略

1) 連続セミマルチンゲール  $C$  と純粋ジャンプ過程  $J$  を

$$C_t^k = Y_0^k + \int_0^t a_s^k ds + \sum_{j=1}^{d'} \int_0^t \gamma_{s-}^{kj} dw_s^j,$$

$$J_t^k = \sum_{0 < s \leq t} \Delta Y_s^k$$

で定義すれば  $Y_t = C_t + J_t$  である。標本路毎に、 $n$  を十分大きくとれば各  $i \leq [nt]$  について  $(J_t)_{t \in [(i-1)/n, (i+m-1)/n]}$  が高々 1 回しかジャンプを持たないようにできる。ここで  $c_i^{n,l} := \sqrt{n} \Delta_{i+l-1}^n C$ ,  $j_i^{n,l} := \sqrt{n} \Delta_{i+l-1}^n J$  と書けば

$$|M_t^n(g; Y) - M_t^n(g; C)| \leq m_0 \max_{k \leq m_0} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \left\{ \prod_{l=1}^m g_l^k(c_i^{l,n} + j_i^{l,n}) - \prod_{l=1}^m g_l^k(c_i^{l,n}) \right\} \right|$$

であるが、右辺の被和関数は  $[(i-1)/n, (i+m-1)/n]$  上でジャンプが生じていない場合は 0 であり、またジャンプが生じている場合には

$$\left( \prod_{l \leq m, l \neq i} |g_l^k(c_i^{l,n})| \right) |g_i^k(c_i^{i,n} + j_i^{i,n}) - g_i^k(c_i^{i,n})|$$

という形で上から抑えられる。更に、 $j_i^{l,n} \neq 0$  となる  $i \leq [nt]$  は有限個しかないという仮定および連続セミマルチンゲールの局所一様連続度の性質 (cf. Barndorff-Nielsen et al., 2006c, Lemma 1) を踏まえれば、以下を示すのは易しい：定理 2.1 の仮定の下で

$$|M_t^n(g; Y) - M_t^n(g; C)| \lesssim \{1 + (\log n)^{\alpha/2}\}^{m-1} \left[ \frac{1}{n} \{1 + (\log n)^{\alpha/2}\} + n^{\alpha/2-1} \right];$$

定理 2.4 の仮定の下で

$$|\sqrt{n} \{M_t^n(g; Y) - M_t^n(g; C)\}| \lesssim (\log n)^{\alpha(m-1)/2} n^{(\alpha-1)/2}.$$

ここで記号  $a_n' \lesssim a_n''$  は、ある正定数  $c > 0$  がとれて任意の十分大きい  $n$  に対して  $a_n' \leq c a_n''$  となることを表す。これらの評価により、定理 2.1 および 2.4 の証明は各々 (2.6), (2.9) の下で  $J=0$  の場合に帰着されることになる。 $\alpha$  に関するこれらの条件は、ジャンプの効果を無視するためには一般に緩和不可能であることが Barndorff-Nielsen et al. (2006c) で言及されている。

2) 定理 2.1 については、各  $k$  に対する分解

$$\begin{aligned} M_t^n(g; C)^k &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \prod_{l=1}^m \rho_{\gamma_{(i-1)/n}}(g_l^k) \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \left\{ E \left[ \prod_{l=1}^m g_l^k(c_i^{l,n}) \middle| \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right] - \prod_{l=1}^m \rho_{\gamma_{(i-1)/n}}(g_l^k) \right\} \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \left\{ \prod_{l=1}^m g_l^k(c_i^{l,n}) - E \left[ \prod_{l=1}^m g_l^k(c_i^{l,n}) \middle| \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right] \right\} \\ &=: M_t^{1,n}(g; C)^k + M_t^{2,n}(g; C)^k + M_t^{3,n}(g; C)^k \end{aligned}$$

を見ると、Barndorff-Nielsen et al. (2006a, Section 6) と同様にして  $M_t^{1,n}(g; C)^k \rightarrow^p M_t(g; \gamma)^k$  を、また Barndorff-Nielsen et al. (2006a, Lemma 5.3) と同様にして  $M_t^{2,n}(g; C)^k \rightarrow^p 0$  を示せる。 $M_t^{3,n}(g; C)^k \rightarrow^p 0$  を得るためには、Barndorff-Nielsen et al. (2006a, Lemma 5.1) の素朴な変形である下記の補題を  $\chi_i^n = n^{-1} \prod_{l=1}^m g_l^k(c_i^{l,n})$  として適用すればよい (今  $t > 0$  は固定している) :

**補題 2.6.**  $\chi_i^n$  を  $\mathcal{F}_{(i+m-1)/n}$ -可測な確率変数とし,  $\sum_{i \leq [nt]} E[|\chi_i^n|^2 | \mathcal{F}_{(i-1)/n}] \rightarrow^p 0$  と仮定する. このとき  $\sum_{i \leq [nt]} (\chi_i^n - E[\chi_i^n | \mathcal{F}_{(i-1)/n}]) \rightarrow^p 0$  が従う.

3) 定理 2.4 についても Barndorff-Nielsen et al. (2006a, 2006b) の証明に倣う形になるが, Jacod (1997) の安定中心極限定理を適用する際の二次変動の計算において若干の注意を要する. まず,  $\beta_i^{l,n} = \sqrt{n} \gamma_{(i-1)/n} \Delta_{i+l-1}^n w$  とおいて以下の分解に着目しよう:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \{M_t^n(g; C)^k - M_t(g; \gamma)^k\} &= \sum_{i=1}^{[nt]} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \prod_{l=1}^m g_l^k(\beta_i^{l,n}) - E \left[ \prod_{l=1}^m g_l^k(\beta_i^{l,n}) \middle| \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right] \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{[nt]} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \left( \prod_{l=1}^m g_l^k(c_i^{l,n}) - \prod_{l=1}^m g_l^k(\beta_i^{l,n}) \right) \right. \\ &\quad \left. - E \left[ \prod_{l=1}^m g_l^k(c_i^{l,n}) - \prod_{l=1}^m g_l^k(\beta_i^{l,n}) \middle| \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right] \right\} \\ &\quad + \left\{ \sum_{i=1}^{[nt]} \frac{1}{\sqrt{n}} E \left[ \prod_{l=1}^m g_l^k(c_i^{l,n}) \middle| \mathcal{F}_{(i-1)/n} \right] - \sqrt{n} M_t(g; \gamma) \right\} \\ &=: \Lambda_{k,t}^n + R_t^{k,1,n} + R_t^{k,2,n}. \end{aligned}$$

各  $k$  について, Barndorff-Nielsen et al. (2006a, “Proof of Theorem 5.6”, pp.51–52) と同様にして  $R_t^{k,1,n} \rightarrow^p 0$  を, また Barndorff-Nielsen et al. (2006a, Section 7) と同様にして  $R_t^{k,2,n} \rightarrow^p 0$  を示すことができる. 残る主要項  $\Lambda_t^n = (\Lambda_t^{k,n})_k$  は

$$(2.13) \quad \Lambda_t^{k,n} = \sum_{i=m}^{[nt]+m-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \zeta_i^{k,n} + o_p(1)$$

と表せる. ここで

$$\zeta_i^{k,n} = \sum_{q=1}^m \left( \prod_{l=1}^{q-1} g_l^k(\beta_{i-q+1}^{l,n}) \right) \{g_q^k(\beta_{i-q+1}^{q,n}) - \rho_{\gamma_{(i-q)/n}}(g_q^k)\} \left( \prod_{l=q+1}^m \rho_{(i-q)/n}(g_l^k) \right)$$

であり, 各  $\zeta_i^n = (\zeta_i^{k,n})_k$  は  $\mathcal{F}_{i/n}$ -可測である: (2.13) の和におけるインデックス  $i$  を  $m$  から始まるようにずらしたのは,  $m=2$  の場合を扱った Barndorff-Nielsen et al. (2006a) と同様に, Jacod (1997, Theorem 3-2) を形式上直接適用するために  $\zeta_i^n$  を  $\mathcal{F}_{i/n}$ -可測としたかったことによる. 特に, 各  $1 \leq k, k' \leq m_0$  に対して計算を重ねていけば

$$\frac{1}{n} \sum_{i=m}^{[nt]+m-1} E[\zeta_i^{k,n} \zeta_i^{k',n} | \mathcal{F}_{(i-1)/n}] \rightarrow^p U_t^{kk'}$$

が示される. Barndorff-Nielsen et al. (2006a, 2006b) と同様にして Jacod (1997, Theorem 3-2) の他の条件も成り立つことが示せ, 定理 2.4 の証明が終わる.

### 3. 第二特性量の推定

前節の結果に基づき, 本稿の主眼である (1.3) の推定量の漸近分布を導出しよう.

#### 3.1 モデル設定

確率基底  $\mathbb{P} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F})_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$  の上で定義される以下の形の 2 次元セミマルチンゲール

$X = (X^1, X^2)^\top$  を考える:

$$(3.1) \quad X_t^k = X_0^k + \int_0^t b_s^k ds + \sum_{j=1}^{d'} \int_0^t \sigma_{s-}^{kj} dw_s^j + \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s^k.$$

ここで  $w = (w^j)_{j \leq d'}$  は  $d'$  次元標準ウィーナー過程,  $b = (b^k)_{k \leq 2}$  は可予測過程,  $\sigma = (\sigma^{kj})_{k \leq 2, j \leq d'}$  は右連続かつ各点で左極限を持つ適合過程,  $X_0$  は  $\mathcal{F}_0$ -可測確率ベクトルである. 本節を通じて  $t > 0$  を一つ固定し, データ系列  $(X_{i/n})_{i=0}^{[nt]}$  が得られている状況を対象とする; 以下で扱う統計量には形式上  $(X_{i/n})_{i=[nt]+1}^{[nt]+2m-2}$  の要素も含まれているが,  $m$  は固定された定数なので漸近的には影響しない. また, 定数  $r > 0$  に対し,  $\mu_r$  で標準正規分布の  $r$  次絶対積率を表す:

$$\mu_r = \frac{2^{r/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right).$$

(3.1) の下, (複合同順で)

$$X_t^1 \pm X_t^2 = (X_0^1 \pm X_0^2) + \int_0^t (b_s^1 \pm b_s^2) ds + \sum_{j=1}^{d'} \int_0^t (\sigma_{s-}^{1j} \pm \sigma_{s-}^{2j}) dw_s^j + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s^1 \pm \Delta X_s^2)$$

であり, 見易さのため

$$Y^1 = X^1, Y^2 = X^2, Y^3 = X^1 + X^2, Y^4 = X^1 - X^2$$

とおけば  $Y = (Y^k)_{k \leq 4}$  は  $r=4$  として (2.1) の形に書ける. このように記号上  $X$  と  $Y$  を対応させ, 更に  $y = (y^k)_{k \leq 4}$  に対して

$$(3.2) \quad g_t^k(y) = |y^k|^{2/m}, \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

として前節の結果を利用していく. つまり, ここでは形式上  $m_0 = 4$  の状況を扱うことになる. 本節では 1 次元確率過程  $\xi$  に対して

$$M_t^n(m, \xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \prod_{l=1}^m |\sqrt{n} \Delta_{i+l-1}^n \xi|^{2/m}$$

と書くことにする. このとき, (3.2) の下で各  $k \leq 4$  について

$$M_t^n(g; Y)^k = M_t^n(m, Y^k)$$

のように前節の記号  $M_t^n(g; Y)$  と対応する.  $g_t^k$  を  $l$  に依存しない形にとったので, 以下では  $g_t^k = g^k$  と書く.

以上の記号の下, (1.3) で定義される  $\theta_t$  の一致推定量の漸近挙動を見ていく.

### 3.2 一致推定量

推定量  $\hat{\theta}_t^n$  を

$$(3.3) \quad \hat{\theta}_t^n = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_t^{11,n} \\ \hat{\theta}_t^{21,n} \\ \hat{\theta}_t^{22,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{2/m}^{-m} M_t^n(m, X^1) \\ \mu_{2/m}^{-m} \frac{1}{4} \{M_t^n(m, X^1 + X^2) - M_t^n(m, X^1 - X^2)\} \\ \mu_{2/m}^{-m} M_t^n(m, X^2) \end{pmatrix}$$

で定義する. MPV のジャンプに対する頑健性に加えて二次変動に関する分極公式

$$[X^1, X^2] = \frac{1}{4} \{[X^1 + X^2] - [X^1 - X^2]\}$$

を思い起こせば, (3.3) は自然な推定量である.  $2/m < 2$ , 即ち  $m \geq 2$  であれば定理 2.1 から直ちに  $\hat{\theta}_t^n$  の一致性が従う:

定理 3.1. (2.2) が  $Y$  を  $X$  に代えて成り立っていれば,  $m \geq 2$  に対して  $\hat{\theta}_t^n \rightarrow^p \theta_t$  が従う.

注意 3.2. (3.3) の三つの要素には簡単のため共通の  $m$  を入れたが, 実際にはこれらは異なる 2 以上の自然数でもよい.

注意 3.3. “ $X^1$  と  $X^2$  は同時にはジャンプを持たない” という仮定のもとでは, 二次変動の公式から

$$[X^1, X^2]_t = \langle X^{(c)} \rangle_t^{21} + \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s^1 \Delta X_s^2 = \langle X^{(c)} \rangle_t^{21}$$

となり, 理論上は通常の QV の非対角成分を用いれば十分であることになる. しかしながら, 実際の有限標本の状況においては同一の区間  $[(i-1)/n, i/n]$  において  $X^1$  と  $X^2$  が同時にジャンプを持ち得るため, 大きなバイアスが生じる可能性を無視できない点に注意せねばならない.

### 3.3 推定量の漸近標準正規性

適合過程  $\Lambda_t = (\Lambda_t^{rj})_{r \leq 4, j \leq d'} \in \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^{d'}$  で  $Y$  の拡散係数過程を表す:

$$\Lambda^{1j} := \sigma^{1j}, \Lambda^{2j} := \sigma^{2j}, \Lambda^{3j} := \sigma^{1j} + \sigma^{2j}, \Lambda^{4j} := \sigma^{1j} - \sigma^{2j}.$$

(3.3) の定義, 定理 2.4, および連続写像定理 (Aldous and Eagleson, 1978 参照) により,  $m \geq 3$  (条件 (2.9), 即ち  $2/m < 1$  に対応) に対して

$$(3.4) \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_t^n - \theta_t) \rightarrow^{d(\mathcal{F})} \begin{pmatrix} \mu_{2/m}^{-m} \sum_{j \leq 4} \int_0^t a_s^{1j} dw_s^j \\ \frac{1}{4} \mu_{2/m}^{-m} \sum_{j \leq 4} \int_0^t (a_s^{3j} - a_s^{4j}) dw_s^j \\ \mu_{2/m}^{-m} \sum_{j \leq 4} \int_0^t a_s^{2j} dw_s^j \end{pmatrix} =^d V_t^{1/2} \eta$$

を得る. ここで  $=^d$  は分布同等を表し,  $\eta$  は  $\mathcal{F}$  と独立な  $\mathcal{N}_3(0, I_3)$ -確率変数, また

$$(3.5) \quad \begin{aligned} A_t^{kk'} &:= \sum_{j \leq 4} \int_0^t a_s^{kj} a_s^{k'j} ds \\ &:= \int_0^t \left[ \{\rho_{\Lambda_s}(g^k g^{k'})\}^m - (2m-1) \{\rho_{\Lambda_s}(g^k) \rho_{\Lambda_s}(g^{k'})\}^m \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{q=1}^{m-1} \{\rho_{\Lambda_s}(g^k g^{k'})\}^q \{\rho_{\Lambda_s}(g^k) \rho_{\Lambda_s}(g^{k'})\}^{m-q} \right] ds \end{aligned}$$

( $A_t^{kk'}$  は  $m$  に依存する) に対して  $V_t$  は以下のように与えられる:

$$(3.6) \quad V_t = \mu_{2/m}^{-2m} \begin{pmatrix} A_t^{11} & & \text{sym.} \\ \frac{1}{4}(A_t^{13} - A_t^{14}) & \frac{1}{16}(A_t^{33} + A_t^{44} - 2A_t^{34}) & \\ A_t^{12} & \frac{1}{4}(A_t^{23} - A_t^{24}) & A_t^{22} \end{pmatrix}.$$

以下  $V_t$  が正則であると仮定する.  $V_t$  の一致推定量  $\hat{V}_t^n$  を明示的に構成すれば (3.4) によって安定型中心極限定理

$$(\hat{V}_t^n)^{-1/2} \sqrt{n}(\hat{\theta}_t^n - \theta_t) \mathbf{1}_{\{\hat{V}_t^n > 0\}} \rightarrow^{d(\mathcal{F})} \mathcal{N}_3(0, I_3)$$

が従う. (3.6) の表現により, このためには  $(A_t^{kk'})_{k, k'}$  の一致推定量を構成できれば十分である.

まず  $k = k'$  の場合については, Barndorff-Nielsen and Shephard (2004c, Section 5.2) で考察された 1 次元の場合に帰着され, 正規分布の尺度変換によって  $V_t^{kk}$  の表現を飛躍的に簡略化で

きる。即ち、定数

$$K_m := \mu_{4/m}^m - (2m-1)\mu_{2/m}^{2m} + 2 \sum_{q=1}^{m-1} \mu_{2/m}^{2(m-q)} \mu_{4/m}^q$$

を導入すれば、(3.5)は

$$\begin{aligned} A_t^{kk} &= \int_0^t \left[ \{\rho_{\Lambda_s}((g^k)^2)\}^m - (2m-1)\{\rho_{\Lambda_s}(g^k)\}^{2m} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{q=1}^{m-1} \{\rho_{\Lambda_s}((g^k)^2)\}^q \{\rho_{\Lambda_s}(g^k)\}^{2(m-q)} \right] ds \\ &= K_m \begin{cases} \int_0^t \{\sum_{j \leq d'} (\sigma_s^{kj})^2\}^2 ds, & k=1,2, \\ \int_0^t \{\sum_{j \leq d'} (\sigma_s^{1j} + \sigma_s^{2j})^2\}^2 ds, & k=3, \\ \int_0^t \{\sum_{j \leq d'} (\sigma_s^{1j} - \sigma_s^{2j})^2\}^2 ds, & k=4 \end{cases} \\ &=: K_m \eta_t^k \end{aligned}$$

となる。定理 2.1 により、 $m' \geq 3$  および  $k \leq 4$  に対して

$$n \sum_{i=1}^{[nt]} \prod_{l=1}^{m'} |\Delta_{i+l-1} Y^k|^{4/m'} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \prod_{l=1}^{m'} |\sqrt{n} \Delta_{i+l-1} Y^k|^{4/m'} \xrightarrow{p} \mu_{4/m'}^{m'} \eta_t^k$$

が得られる；ここで  $m' \geq 3$  としたのは定理 2.1 を適用するための条件 (2.6) に対応する  $4/m' < 2$  による。これらから、 $m' \geq 3$  であれば各  $k$  について

$$(3.7) \quad \hat{A}_t^{kk,n} := \frac{K_m}{\mu_{4/m'}^{m'}} n \sum_{i=1}^{[nt]} \prod_{l=1}^{m'} |\Delta_{i+l-1} Y^k|^{4/m'} \xrightarrow{p} A_t^{kk}$$

となる。これで  $A_t^{kk}$  の一致推定量  $\hat{A}_t^{kk,n}$  ( $k=1,2,3,4$ ) が得られた。

**注意 3.4.** 形式的に  $m=1$  ととれば  $K_1=2$  であり、これは、 $X$  が連続型かつ 1 次元の場合の Barndorff-Nielsen and Shephard (2004b) の結果に対応する。

**注意 3.5.**  $\hat{\theta}_t^{11,n}$  および  $\hat{\theta}_t^{22,n}$  の漸近ランダム分散は、それらに掛かる定数  $C(m) := K_m \mu_{2/m}^{-2m}$  を通じてのみ  $m$  に依存し、また  $m \mapsto C(m)$  は  $m$  について単調に増加する。従って、 $\hat{\theta}_t^{11}$  および  $\hat{\theta}_t^{22}$  の推定に関しては、漸近的には  $m=3$  (即ち許容される最小の  $m$ ) が最適な選択ということになる。

翻って  $k \neq k'$  の場合 には、 $\rho_{\sigma_s}(g^k g^{k'})$  の項に  $k=k'$  のときのような都合の良い尺度変換は期待できない。実際、Corcuera et al. (2006, Lemma 9) にあるように、一般に  $\rho \neq 0$  に対して確率変数  $(U, V)$  が二次元正規分布  $\mathcal{N}_2(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix})$  に従う場合、 $r > 0$  について  $|U|^r |V|^r$  の期待値は

$$E[|U|^r |V|^r] = (1 - \rho^2)^{r+1/2} 2^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\rho)^{2k}}{\pi(2k)!} \left\{ \Gamma\left(\frac{r+1}{2} + k\right) \right\}^2$$

と煩雑な表現になり、この量を上手く尺度変換することは無理であろう。よってここでは定理 2.1 を (3.5) の右辺に項別に適用し、複数の MPV の線形結合として  $\hat{A}_t^{kk',n}$  を構成する：

$$(3.8) \quad \hat{A}_t^{kk',n} := n \left\{ \sum_{i=1}^{[nt]} \prod_{l=1}^m |\Delta_{i+l-1}^n Y^k|^{2/m} |\Delta_{i+l-1}^n Y^{k'}|^{2/m} \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (2m-1) \sum_{i=1}^{[nt]} \prod_{l=1}^m |\Delta_{i+l-1}^n Y^k|^{2/m} |\Delta_{i+l+m-1}^n Y^{k'}|^{2/m} \\
& + 2 \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{[nt]} \left( \prod_{l=1}^{m-q} |\Delta_{i+l-1}^n Y^{k'}|^{2/m} \right) \\
& \cdot \left( \prod_{l=m-q+1}^m |\Delta_{i+l-1}^n Y^k \cdot \Delta_{i+l-1}^n Y^{k'}|^{2/m} \right) \left( \prod_{l=m+1}^{2m-q} |\Delta_{i+l-1}^n Y^k|^{2/m} \right) \Big\} \\
& \rightarrow^p A_t^{kk'}.
\end{aligned}$$

この  $\hat{A}_t^{kk',n}$  はきれいな形とは言えないが、与えられた各  $m$  について簡単に計算できる点が重要である(勿論  $k=k'$  の場合にも(3.8)において  $k=k'$  とした統計量を使うことは可能)。

今(3.6)の右辺の  $A_t^{kk'}$  を全て(3.7)および(3.8)で構成した  $\hat{A}_t^{kk',n}$  に代えたものとして  $\hat{V}_t^n = [\hat{V}_t^{kk',n}]_{k,k'}$  を定義すれば、 $m, m' \geq 3$  に対して  $\hat{V}_t^n \rightarrow^p V_t$  が従う。

以上を総括して以下の定理を得る：

**定理 3.6.** (2.2)で  $Y$  を  $X$  に代えたもの、(2.3)で  $\gamma$  を  $\sigma$  に代えたもの、および(2.4)で  $\gamma$  を  $\sigma$  に代えた類似の仮定が成り立っているとし、また(3.6)で与えられる  $V_t$  が  $P$ -a.s. で正則であるとす。このとき  $m, m' \geq 3$  に対して  $P[\hat{V}_t^n > 0] \rightarrow 1$  であり、

$$(\hat{V}_t^n)^{-1/2} \sqrt{n}(\hat{\theta}_t^n - \theta_t) \mathbf{1}_{\{\hat{V}_t^n > 0\}} \xrightarrow{d(\mathcal{F})} \mathcal{N}_3(0, I_3)$$

が成り立つ。特に第二特性量の非対角要素  $\theta_t^{21}$  の推定については

$$\hat{V}_t^{22,n} := \frac{\hat{A}_t^{33,n} + \hat{A}_t^{44,n} - 2\hat{A}_t^{34,n}}{16\mu_{2/m}^2}$$

に対して

$$(3.9) \quad \sqrt{\frac{n}{\hat{V}_t^{22,n}}} (\hat{\theta}_t^{21,n} - \theta_t^{21}) \mathbf{1}_{\{\hat{V}_t^{22,n} > 0\}} \xrightarrow{d(\mathcal{F})} \mathcal{N}_1(0, 1)$$

が成り立つ。

**注意 3.7.** 定理 3.6 の仮定の下、(3.9)によって統計量

$$\sqrt{\frac{n}{\hat{V}_t^{22,n}}} \hat{\theta}_t^{21,n} \mathbf{1}_{\{\hat{V}_t^{22,n} > 0\}}$$

は  $\theta_t^{21} = \langle X^{(c)} \rangle_t^{21} = 0$  のときに限って漸近的に標準正規分布に従う： $\theta_t^{21} \neq 0$  であれば発散する。これを利用して、 $\langle X^{(c)} \rangle_t^{21} = 0$  か否かの検定を定式化できる。

**注意 3.8.** (3.2)の構造を適当に拡げることによって QV と MPV の同時収束も導出可能である。特に

$$\sum_{i \leq [nt]} \Delta_i^n X^1 \Delta_i^n X^2 - \hat{\theta}_t^{21,n} \rightarrow^p [X]_t^{21} - \langle X^{(c)} \rangle_t^{21} = \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s^1 \Delta X_s^2$$

が成り立つので、安定分布収束の下でデルタ法を適用して  $\sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s^1 \Delta X_s^2$  の信頼領域推定も定式化できる。

#### 4. 数値実験

$\hat{\theta}_t^{11,n}$  と  $\hat{\theta}_t^{22,n}$  については  $X$  が 1 次元の場合に帰着され、その数値実験については、第 1.2 節

の冒頭で紹介した URL にある Barndorff-Nielsen et al. (2006c) の長尺版でなされている。本節では (3.9) に焦点を当て、その正規近似の精度を簡単な数値実験を通じて観察しよう。ジャンプがない連続セミマルチンゲールの場合の数値実験については Barndorff-Nielsen and Shephard (2004a) を参照されたい。

Barndorff-Nielsen and Shephard (2004b, 2005a) および Barndorff-Nielsen et al. (2005) においては、有限標本での標準正規近似精度を改善するための対数変換の有用性が議論されている。この手順は Aldous and Eagleson (1978) の安定分布収束に関する連続写像定理によって理論的に正当化されるが、(3.9) においては推定対象  $\theta_t^{21}$  は負値かもしれないので、そのような手法の直接適用はできないことに注意されたい。

ここでは  $t=1$ ,  $m=m'=3$  と設定し、また、 $X$  がジャンプした場合には必ずその時点で  $X^1$  と  $X^2$  が同時にジャンプしているような場合を見ていくことにする。

#### 4.1 例 1: レヴィ過程の場合

まず、 $X$  を以下で与えられる二次元レヴィ過程とする：

$$(4.1) \quad \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_t^1 \\ w_t^2 \end{pmatrix} + \mathbf{1}_{\{N_t \geq 1\}} \sum_{i \leq N_t} \begin{pmatrix} \epsilon_i^1 \\ \epsilon_i^2 \end{pmatrix}.$$

ここで  $\sigma = (\sigma^{kk'})$  は定数、 $N$  は強度  $\lambda > 0$  のポアソン過程であり、 $(w, N)$  と独立な同分布確率変数の列  $(\epsilon_i^1, \epsilon_i^2)_i$  は二次元正規分布  $\mathcal{N}_2(0, [(\delta^{kk'})_{k,k'}]^{\otimes 2})$  に従う。ここではサンプル数を  $n=500, 1000, 2000$  の三通りに設定し、 $[0, 1]$  上で 5 回ジャンプが生じたという条件の下で  $\hat{\theta}_1^{12,n}$  を計算する。この場合、ジャンプ時点の分布は 5 つの独立な  $[0, 1]$ -一様乱数の順序統計量の分布に等しい。

パラメータの値は  $\sigma^{11}=1.0$ ,  $\sigma^{12}=-0.5$ ,  $\sigma^{21}=0$ ,  $\sigma^{22}=1.0$ ,  $\delta^{11}=0.5$ ,  $\delta^{12}=0.2$ ,  $\delta^{21}=-0.1$ ,  $\delta^{22}=0.4$  ととった。このとき  $E[(\epsilon_i^1)^2]=0.29$ ,  $E[(\epsilon_i^2)^2]=0.17$ ,  $E[\epsilon_i^1 \epsilon_i^2]=0.03$  となる。推定対象は  $\theta_1^{12} = \sigma^{12} \sigma^{22} = -0.5$  である。

擬似サンプル  $(X_{i/n})_{i \leq n}$  を独立に 500 個発生させ、得られた  $\theta_1^{12}$  ( $m=m'=3$ ) の推定値 500 個の標本平均および標本標準偏差 (s.d.) を表 1 に示す (比較のため、 $\hat{\theta}_t^{kk,n}$  に関する結果も併せて記載した)。

MPV の構造から  $\hat{\theta}_t^{kk,n}$  はジャンプ変動に起因する正のバイアスを持つが、MPV の差の形で定義される  $\hat{\theta}_1^{12,n}$  は一般に正のバイアスを持つとは限らない。実際表 1 において  $\hat{\theta}_1^{12,n}$  のバイアスは負であり、またその大きさは  $\hat{\theta}_t^{kk,n}$  の正のバイアスの大きさと比較して小さいことが観察できる。

(3.9) の左辺に対応する QQ プロットおよび  $n=500, 1000, 2000$  の各場合における 500 個の  $\hat{V}_1^{22,n}$  のプロットを図 1 に示す。

$\hat{V}_1^{22,n} \leq 0$ , 即ち (3.9) が意味を成さないような試行は 1 回もなかった。3 つの列は左から各々  $n=500, 1000, 2000$  の場合に対応しており、また上段の各 QQ プロットにおける 45 度直線はター

表 1. モデル (4.1) に対する  $\theta_1 = (\theta_1^{11}, \theta_1^{12}, \theta_1^{22}) = (1.25, -0.5, 1.0)$  の推定値の標本平均および標本標準偏差 (s.d.).

$n$	$\hat{\theta}_1^{11,n}$ (s.d.)	$\hat{\theta}_1^{12,n}$ (s.d.)	$\hat{\theta}_1^{22,n}$ (s.d.)
500	1.3995 (0.1363)	-0.5252 (0.0789)	1.1029 (0.1015)
1000	1.3475 (0.0838)	-0.5145 (0.0549)	1.0648 (0.0679)
2000	1.3138 (0.0560)	-0.5139 (0.0384)	1.0474 (0.0431)

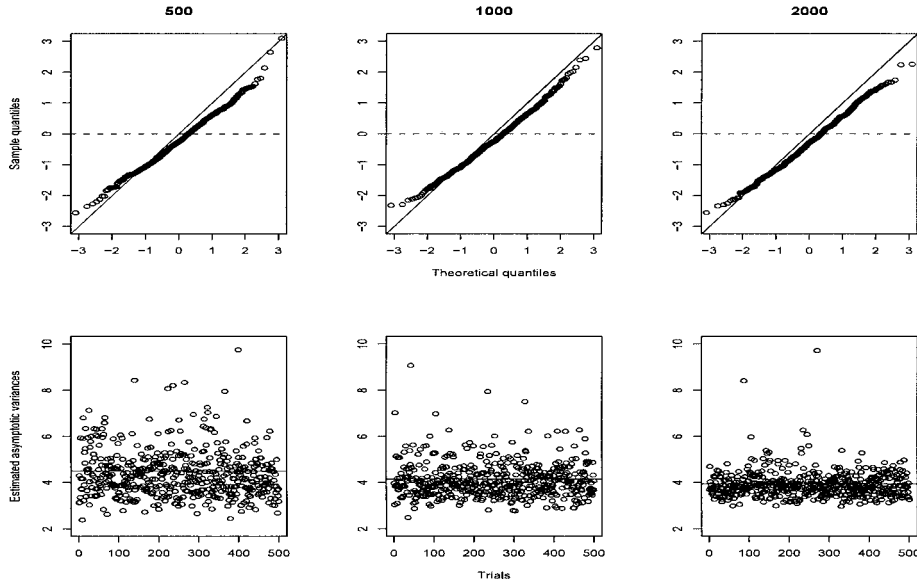


図1. モデル(4.1)における(3.9)の近似精度に関するQQプロット(上段), および対応する  $\hat{V}_1^{22,n}$  の推定値のプロット(下段).

ゲットである標準正規分布に対応する. 下段の  $\hat{V}_1^{22,n}$  のプロットにおいては, 若干見難いが, 各々において標本平均を示す横直線を引いておいた.  $n$  の増加に伴って,  $\hat{V}_1^{22,n}$  が真の値(ここではある定数)に収束していることが分かる.

図1の3つのQQプロットでは  $(\hat{V}_1^{22,n})^{-1/2}(\hat{\theta}_1^{12,n} - \theta_1^{12})$  は傾きが1未満の直線状に散布している様子が見取れる. 要因としては,  $\hat{V}_1^{22,n}$  が,  $n \leq 2000$  程度ではまだばらつきが大きく不安定であることが考えられよう.

また,  $m$  および  $m'$  を4以上に大きくすると, それに伴ってより多くのMPVの線形結合となる  $\hat{V}_1^{22,n}$  が不安定になり, 正規近似精度が悪化していく現象が観察された(これは次の例2の数値実験結果においても観察された). これより, 実用上は許容される範囲で最小の  $m = m' = 3$  の推奨が示唆される.

#### 4.2 例2: $\sigma$ が確率変動する場合

次に以下の  $X$  を見ていく:

$$(4.2) \quad \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} \sigma_s^1 dB_s^1 \\ \sigma_s^2 dB_s^2 \end{pmatrix} + \mathbf{1}_{\{N_t \geq 1\}} \sum_{0 < s \leq N_t} \begin{pmatrix} \epsilon_i^1 \\ \epsilon_i^2 \end{pmatrix}.$$

ここで  $Y^k := (\sigma^k)^2$ ,  $k=1,2$ , は

$$dY_t^k = \alpha^k (\beta^k - Y_t^k) dt + \sqrt{\gamma^k Y_t^k} dB_t^{k'}$$

で定義される平方根拡散過程であり,  $(B^1, B^2, B^{1'}, B^{2'})$  は, 4次元標準ウィーナー過程  $w = (w^l)_{l \leq 4}$  と定数  $\rho, \rho_1, \rho_2$  を介して以下のように表現されるものである:

$$B_t^1 = w_t^1, \quad B_t^2 = \rho w_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} w_t^2,$$



表 2. モデル (4.2) に対する  $\theta_1 = (\theta_1^{11}, \theta_1^{12}, \theta_1^{22})$  の推定値の標本平均および標本標準偏差 (s.d.).

$n$	$\hat{\theta}_1^{11,n} - \theta_1^{11}$ (s.d.)	$\hat{\theta}_1^{12,n} - \theta_1^{12}$ (s.d.)	$\hat{\theta}_1^{22,n} - \theta_1^{22}$ (s.d.)
500	0.0324 (0.0874)	0.0127 (0.0609)	0.0320 (0.0842)
1000	0.0192 (0.0594)	0.0063 (0.0418)	0.0175 (0.0601)
2000	0.0147 (0.0398)	0.0038 (0.0326)	0.0086 (0.0413)

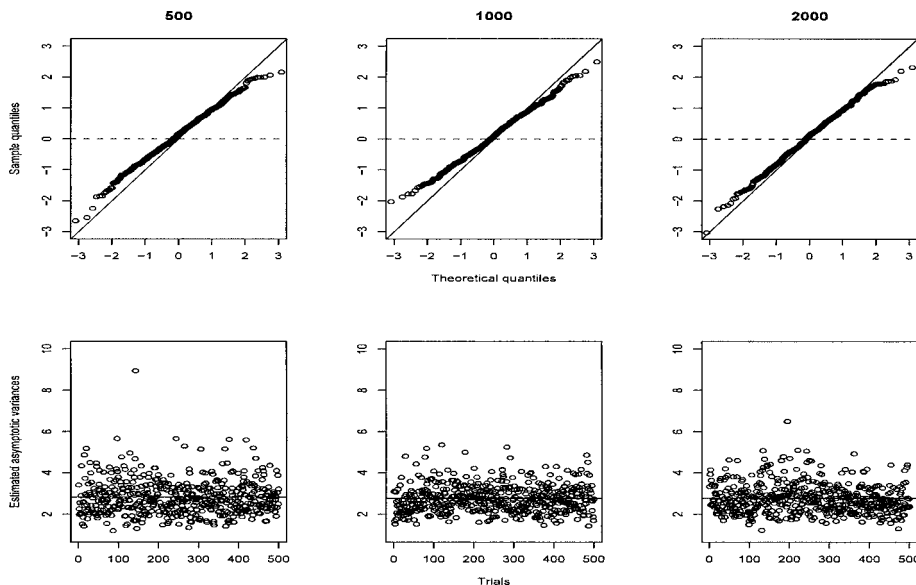


図 2. モデル (4.2) における (3.9) の近似精度に関する QQ プロット (上段), および対応する  $\hat{V}_1^{22,n}$  の推定値のプロット (下段).

$$B_t^1 = \rho_1 w_t^1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} w_t^3, \quad B_t^2 = \frac{\rho_2}{\sqrt{1 - \rho^2}} w_t^2 + \sqrt{1 - \frac{\rho_2^2}{1 - \rho^2}} w_t^4.$$

ジャンプ部分の構造は例 1 と全く同じとする. 先の例と同様に  $n = 500, 1000, 2000$  とし,  $[0, 1]$  上で 5 回ジャンプが生じた状況を扱う.

正数  $\alpha^k, \beta^k, \gamma^k$  が  $\alpha^k \beta^k \geq \gamma^k / 2$  をみたせば,  $\sigma_0^k > 0$  の下で  $(\sigma_t^k)_{t \in [0, 1]} \subset (0, \infty)$  a.s. となることが知られている. ここでは, パラメータの値を  $\alpha^1 = 3, \alpha^2 = 2, \beta^1 = \beta^2 = 1, \gamma^1 = 0.3, \gamma^2 = 0.4, \rho = 0.3, \rho_1 = -0.4, \rho_2 = -0.2$  ととった. 推定対象は  $\theta_1^{12} = \rho \int_0^1 \sigma_s^1 \sigma_s^2 ds = 0.3 \int_0^1 \sigma_s^1 \sigma_s^2 ds$  で, これは確率変動する量である.

サンプルを擬似生成するに際し, 各試行において多次元オイラー法による以下の近似を  $h = 1/20000$  として用いた ( $\Delta_{t,h} w := w_{t+h} - w_t$  と書く):

$$\begin{pmatrix} X_{t+h}^1 \\ X_{t+h}^2 \\ Y_{t+h}^1 \\ Y_{t+h}^2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ Y_t^1 \\ Y_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^1(\beta^1 - Y_t^1) \\ \alpha^2(\beta^2 - Y_t^2) \end{pmatrix} h + D_t \begin{pmatrix} \Delta_{t,h} w^1 \\ \Delta_{t,h} w^2 \\ \Delta_{t,h} w^3 \\ \Delta_{t,h} w^4 \end{pmatrix},$$

ここで

$$D_t := \begin{pmatrix} \sqrt{Y_t^1} & 0 & 0 & 0 \\ \rho\sqrt{Y_t^2} & \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{Y_t^2} & 0 & 0 \\ \rho_1\sqrt{\gamma^1 Y_t^1} & 0 & \sqrt{1-\rho_1^2}\sqrt{\gamma^1 Y_t^1} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_2}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\gamma^2 Y_t^2} & 0 & \sqrt{1-\frac{\rho_2^2}{1-\rho^2}}\sqrt{\gamma^2 Y_t^2} \end{pmatrix}.$$

こうして生成した  $(X_{ih})_{i=1}^{20000}$  から, 40, 20, 10 ステップ毎に  $X_{ih}$  を拾い上げて各々  $n=500, 1000, 2000$  の場合に対応させ, 例 1 と同様に, 推定値を独立に 500 回算出した.

ここでは  $\theta_1^{12}$  の真値は試行毎に変わるため, 表 2 においては  $\hat{\theta}_1^{12,n} - \theta_1^{12}$  の 0 への収束に関する数値結果を示してある (前例と同様, 比較のために  $\hat{\theta}_t^{kk,n}$  に関する結果も併せて記載してある). 例 1 と同様,  $\hat{\theta}_1^{12,n}$  の一致性は良く成り立っていることが見て取れる.

図 2 において再び (3.9) の左辺に対応する QQ プロットと  $\hat{V}_1^{22,n}$  の推定値のプロットを示す. 傾向は例 1 とほぼ同様であるが,  $\hat{V}_1^{22,n}$  の収束が例 1 と比較して遅いという点が見られる.

## 5. 結語と補遺

本稿では多次元セミマルチンゲールの第二特性量行列, 特にその非対角要素の推定に関するモデルフリーかつ実装容易な手法を与えた. これは Barndorff-Nielsen and Shephard (2004a) の MPV 版であり, 同時に Barndorff-Nielsen et al. (2006c) による 1 次元の場合の結果の多次元版である. 簡単に計算できる統計量に基づいたセミパラメトリック推定が実装可能であり,  $m$  と  $m'$  以外には微調整変数がない点において使い易い推定量と言える. それらの選択については, 第 4.1 節で触れたように許容範囲の中での最小値である  $m=m'=3$  が推奨される. 数値実験においては,  $\hat{\theta}_t^{12,n}$  のバイアスは  $\hat{\theta}_t^{kk,n}$  のそれと比較して小さいが, 漸近分散の推定量  $\hat{V}_t^{22,n}$  の収束速度が緩やかであるという傾向が見られた.

ジャンプ変動に頑健な第二特性量の推定法というのが本稿の主眼であったが, 実際には第二特性量行列は  $X$  に伴うリスクの指標の一つに過ぎないということも念頭に置くべきであり, ジャンプ変動に起因するリスクの定量的管理を同時に行うことは重要な課題と言える. 第 1.2.2 節で言及した (a) および (b) の手法は現在実務の場にも浸透しつつあり, 上記のための標準的な道具と位置付けられよう.

本稿では  $X$  が 2 次元の場合に焦点を当てたが一般に  $d$  次元の場合には

$$\langle X^{(c)} \rangle_t = [\langle X^{(c)k}, X^{(c)k'} \rangle_t]_{k,k'=1}^d = \left[ \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_s^{kj} \sigma_s^{k'j} ds \right]_{k,k'=1}^d$$

であり, 推定対象は  $\theta_t = \text{vech}(\langle X^{(c)} \rangle_t) \in \mathbb{R}^{d(d+1)/2}$  となる.  $d \geq 3$  の場合にも全く同様にして安定型中心極限定理を導出できる. 2 次元の場合との見かけ上の違いとして  $k \neq k', l \neq l'$  に対する  $\hat{\theta}_t^{kk',n}$  と  $\hat{\theta}_t^{ll',n}$  の漸近共分散が現れるが, (3.6) のようにそれらも  $A_t^{kk'}$  の形を介して表現され,  $d=2$  の場合と本質的な違いはない.

また, 本稿では複雑さを避けるためジャンプ回数が局所的に有限回であると仮定した. ジャンプ部分  $\sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s$  が例えば発散するレヴィ測度  $\nu$  を持つレヴィ過程の場合のように局所的に無限回ジャンプを起こすような場合でも, ジャンプ変動の尺度である Blumenthal-Gettoor 指数

$$\inf \left\{ \beta \geq 0 : \int_{|z| \leq 1} |z|^\beta \nu(dz) < \infty \right\} \in [0, 2]$$

が適当な範囲内であれば MPV を介して定理 2.1 および 2.4 と同様な結論を導くことは可能である (1次元の場合の詳細については Barndorff-Nielsen et al., 2006c, Section 3.2 を参照されたい).

最後に、関連する最近の文献の幾つかを紹介しておこう.

- 局所無限ジャンプの場合におけるジャンプ検出フィルター利用型の類似の結果が Gobbi and Mancini (2007) によって得られている. また, 最近 Ait-Sahalia and Jacod (2008), Todorov and Tauchen (2008) は一般の確率過程に対して定義される広い意味での Blumenthal-Gettoor 指数の一次推定を定式化した.

- セミパラメトリックな一般の枠組みで簡単な推定量を構成できたのは推定対象が (時間) 積分量であることによる. 例えばある固定された  $t > 0$  について  $\sigma_t$  を推定したいとなると, 問題は遥かに難しくなる. この方面における先行研究結果としてフーリエ解析に基づいた推定手法が考案されている. 興味のある読者は Malliavin and Mancino (2008), Mancino and Sanfelici (2008) とその参考文献を参照されたい.

- 実現  $r$  次変動や MPV を応用した “固定期間  $[0, t]$  で少なくとも一回ジャンプが生じたか否か” の検定に関する別の文献としては, Ait-Sahalia and Jacod (2007), Jacod and Todorov (2008) が挙げられる. 共にセミマルチンゲールの広い族に対して適用可能な結果である.

- 本稿の立場はジャンプ変動を無視して連続変動の情報のみを抽出するというものであったが, ジャンプの構造を精密に加味した実現  $r$  次変動や MPV の漸近挙動も知られており, この場合一般には極限にジャンプの構造が関与する. 詳細は Jacod (2007, 2008), Corcuera et al. (2007), Woerner (2003, 2007), また関連する論文として Barndorff-Nielsen and Shephard (2006b) を参照されたい. また,  $X$  がセミマルチンゲールから乖離する場合にも先行研究があり, 例えば Corcuera et al. (2006) はウィーナー過程  $w$  をフラクショナルブラウン運動に代えた場合の実現  $r$  次変動の漸近分布論を導出している.

- Kinnebrock and Podolskij (2007) の応用として, 最近 Barndorff-Nielsen et al. (2008) によって QV の一つの変形である realized semivariance (RS) という概念が導入された. (3.1) において  $X$  および  $w$  を 1次元とすると, RS は

$$RS_t^{+,n} := \sum_{i=1}^{[nt]} (\Delta_i^n X)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta_i^n X \geq 0\}}, \quad RS_t^{-,n} := \sum_{i=1}^{[nt]} (\Delta_i^n X)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta_i^n X \leq 0\}}$$

の二つを通じて定義され, これらは

$$RS_t^{+,n} \rightarrow^p \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta X_s \geq 0\}},$$

$$RS_t^{-,n} \rightarrow^p \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2 \mathbf{1}_{\{\Delta X_s \leq 0\}} =: RS_t^-$$

をみtas. 上記論文では, 特に  $RS_t^-$  を計量経済の分野で重要な “下降リスク” の新しい尺度として位置づけ, 様々な分析がなされている.

MPV の拡張およびそれらの応用に関する研究は依然として進行中のようである.

## 謝 辞

丁寧な査読していただき, 多くの改善点の指摘および有益なコメントを下された査読者に御礼申し上げます. 本研究は文部科学省科学研究費補助金の助成を受けています.

## 参 考 文 献

- Ait-Sahalia, Y. and Jacod, J. (2007). Testing for jumps in a discretely observed process, *The Annals of Statistics* (to appear).
- Ait-Sahalia, Y. and Jacod, J. (2008). Estimating the degree of activity of jumps in high frequency financial data, Preprint.
- Aldous, D. J. and Eagleson, G. K. (1978). On mixing and stability of limit theorems, *The Annals of Probability*, **6**, 325–331.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2004a). Econometric analysis of realized covariation: High frequency based covariance, regression, and correlation in financial economics, *Econometrica*, **72**, 885–925.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2004b). A feasible central limit theory for realised volatility under leverage, Unpublished paper, Nuffield College, Oxford.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2004c). Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps (with discussion), *Journal of Financial Econometrics*, **2**, 1–48.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2005a). How accurate is the asymptotic approximation to the distribution of realised variance?, *Identification and Inference for Econometric Models*, 306–331, Cambridge University Press, Cambridge.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2005b). Variation, jumps, market frictions and high frequency data in financial econometrics, *Advances in Economics and Econometrics. Theory and Applications, Ninth World Congress* (eds. R. Blundell, P. Torsten and W. K. Newey), Econometric Society Monographs, Cambridge University Press (forthcoming).
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2006a). Econometrics of testing jumps in financial economics using bipower variation, *Journal of Financial Econometrics*, **4**, 1–30.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2006b). Impact of jumps on returns and realised variances: Econometric analysis of time-deformed Lévy processes, *Journal of Econometrics*, **131**, 217–252.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Jensen, J. L. and Sørensen, M. (1998). Some stationary processes in discrete and continuous time, *Advances in Applied Probability*, **30**, 989–1007.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Shephard, N. and Winkel, M. (2005). Limit theorems for multipower variation in the presence of jumps, <http://www.nuffield.ox.ac.uk/users/shephard/levy/>.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Graversen, S. E., Jacod, J., Podolskij, M. and Shephard, N. (2006a). A central limit theorem for realised power and bipower variations of continuous semimartingales, *From Stochastic Calculus to Mathematical Finance*, 33–68, Springer, Berlin.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Graversen, S. E., Jacod, J. and Shephard, N. (2006b). Limit theorems for bipower variation in financial econometrics, *Econometric Theory*, **22**, 677–719.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Shephard, N. and Winkel, M. (2006c). Limit theorems for multipower variation in the presence of jumps, *Stochastic Processes and Their Applications*, **116**, 796–806.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Kinnebrock, S. and Shephard, N. (2008). Measuring downside risk — Realised semivariance, Preprint.
- Corcuera, J. M., Nualart, D. and Woerner, J. H. C. (2006). Power variation of some integral fractional processes, *Bernoulli*, **12**, 713–735.
- Corcuera, J. M., Nualart, D. and Woerner, J. H. C. (2007). A functional central limit theorem for the realized power variation of integrated stable processes, *Stochastic Analysis and Applications*, **25**, 169–186.
- Dudley, R. M. and Norvaiša, R. (1999a). An introduction to  $p$ -variation and Young integrals, Maphysto Lecture Notes 1998-1, <http://www.maphysto.dk/cgi-bin/gp.cgi?publ=60>.

- Dudley, R. M. and Norvaiša, R. (1999b). *Differentiability of Six Operators on Nonsmooth Functions and  $p$ -variation. With the Collaboration of Jinghua Qian*, Lecture Notes in Mathematics, **1703**, Springer, Berlin.
- Gobbi, F. and Mancini, C. (2006). Identifying the diffusion covariation and the co-jumps given discrete observations. arXiv:math/0610621v1.
- Gobbi, F. and Mancini, C. (2007). Diffusion covariation and co-jumps in bidimensional asset price processes with stochastic volatility and infinite activity Lévy jumps. arXiv:math/0705.1268v1.
- Jacod, J. (1997). On continuous conditional Gaussian martingales and stable convergence in law, *Séminaire de Probabilités, XXXI*, Lecture Notes in Mathematics, **1655**, 232–246, Springer, Berlin.
- Jacod, J. (2007). Asymptotic properties of power variations of Lévy processes, *ESAIM: Probability and Statistics*, **11**, 173–196.
- Jacod, J. (2008). Asymptotic properties of realized power variations and related functionals of semimartingales, *Stochastic Processes and Their Applications*, **118**, 517–559.
- Jacod, J. and Todorov, V. (2008). Testing for common arrivals of jumps for discretely observed multidimensional processes, *The Annals of Statistics* (to appear).
- Kinnebrock, S. and Podolskij, M. (2007). A note on the central limit theorem for bipower variation of general functions, *Stochastic Processes and Their Applications*, **118**, 1056–1070.
- Lee, S. and Mykland, P. A. (2007). Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics, *Review of Financial Studies* (to appear).
- Malliavin, P. and Mancino, M. E. (2008). A Fourier transform method for nonparametric estimation of volatility, *The Annals of Statistics* (to appear).
- Mancino, M. E. and Sanfelici, S. (2008). Robustness of Fourier estimator of integrated volatility in the presence of microstructure noise, *Computational Statistics & Data Analysis*, **52**, 2966–2989.
- 清水泰隆 (2009). 飛躍型確率過程に対する離散観測による閾値推定法, *統計数理*, **57**(1), 97–118.
- Todorov, V. and Tauchen, G. (2008). Activity signature plots and the generalized Blumenthal-Gettoor index, Preprint.
- Woerner, J. H. C. (2003). Variational sums and power variation: A unifying approach to model selection and estimation in semimartingale models, *Statistics & Decisions*, **21**, 47–68.
- Woerner, J. H. C. (2006). Power and multipower variation: Inference for high frequency data, *Stochastic Finance*, 343–364, Springer, New York.
- Woerner, J. H. C. (2007). Inference in Lévy-type stochastic volatility models, *Advances in Applied Probability*, **39**, 531–549.

## Estimation of Second-characteristic Matrix Based on Realized Multipower Variations

Hiroki Masuda

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

Realized multipower variation (MPV for short) defined for stochastic processes discretely observed at high frequency is a generalization of the classical realized quadratic variation. In this note, targeted at a class of multidimensional semimartingales with jumps, we consider first-order inference for the second-characteristic matrix, especially its off-diagonal elements. First we review some prior results concerning asymptotic behavior of MPV, and then formulate a stable central limit theorem for a consistent estimator. In consequence, we can readily construct confidence regions of the estimator as in the one-dimensional case.

---

Key words: Stable central limit theorem, multidimensional semimartingale with finite number of jumps, realized multipower variation, estimation of second characteristic.