時系列モデルと極値理論による金融リスク管理

川崎 能典　**モデリング研究系 教授**

1　問題設定

p_tを日次金融資産価格とすると$X_t = -\log(p_t/p_{t-1})$は日次収益率のマイナス，即ち損失率である．$\{X_t\}$のダイナミクスは，条件付き平均μ_tと条件付き標準偏差σ_tとi.i.d.のイノベーション$\{Z_t\}$とで$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t$と表されると仮定する．ここでは翌日の損失率の分布，とりわけ所与の確率τ(例えば0.999)に対応する高分位点

$$q_\tau(X_{t+1}|\mathscr{F}_t) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} q_\tau(Z) \tag{1}$$

即ち小さな確率で発生する巨大損失に興味がある．(ZはZ_tと同一の周辺分布を持つとする．)

2　GARCH-EVT

μ_tとσ_tのダイナミクスをまずモデリングする．収益率自体の過去依存性は弱いが，1期先騰落率が負で有意になる金融時系列も時々見られるので$\mu_t = \phi X_{t-1}$とAR(1)でモデル化しておく．平均調整後の系列$\epsilon_t = X_t - \mu_t$に対しては，GARCH(1,1)モデルをあてはめる．

$$\sigma_t^2 = \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon_{t-1}^2 + \lambda_2 \sigma_{t-1}^2$$

パラメータは正規疑似最尤法(Gaussian QML)で推定するが，QML推定量$(\hat{\phi}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$には一致性がある．即ち，以下の標準化残差を手にするには十分役立つ．

$$(\hat{Z}_{t-n+1}, \ldots, \hat{Z}_t) = \left(\frac{X_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}}{\hat{\sigma}_{t-n+1}}, \ldots, \frac{X_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t}\right)$$

これらをi.i.d.だと思って，(1)式の$q_\tau(Z)$を一般化パレート分布(GPD)のあてはめで推定しようというのが，McNeil and Frey (2000, *J Empir Financ*)のGARCH-EVT法である．($\hat{\mu}_{t+1}$と$\hat{\sigma}_{t+1}$を得る更新式は自明．)

3　GARCH-UGH

GARCH-EVTの登場以降20年，GARCHパートを様々な時系列モデル(GARCHの変種)で置き換えた研究はおびただしい数の論文が出版されたが，極値理論の部分を改善する研究はなかった．

Kaibuchi, Kawasaki and Stupfler (2021)—以降KKS(2021)と略記—は，裾指数を推定する古典的なノンパラメトリック推定量であるHill推定量にバイアス補正を施した推定量を使うことで，高分位点の推定精度，ひいては金融リスク管理の精度を高める手法を提案した．

詳細は紙幅の関係でKKS(2021)に譲ることとし，ここではごく簡単に概略を記す．まず，標準化残差の順序統計量$\hat{Z}_{1,n} \leq \ldots \leq \hat{Z}_{n,n}$を用意する．$n$個のサンプル中で正の観測値の数を$m$とする．この$m$から，順序統計量の上位何個までを推定に使うか($k$)の，ある種の上限が与えられる．最適な$k$はこの条件と，後述の$\rho_k$の存在範囲との兼ね合いの中で，なるべく大きい$k$を選択する形で与えられる．

次に，Hill推定量とその高次版

$$M_k^{(\alpha)} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\log \hat{Z}_{n-i+1,n} - \log \hat{Z}_{n-k,n})^\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, 4$$

を計算しておく．この$M_k^{(\alpha)}$から，裾指数$\hat{\gamma}_k$の推定量の収束速度に関わるパラメータ$\hat{\rho}_k$と最適な$k(=k_\rho)$が決まり，これらを使ってHill推定量$\hat{\gamma}_k^H(=M_k^{(1)})$のバイアス補正推定量$\hat{\gamma}_{k,k_\rho}$が求まる．裾指数が求まれば，分位点は古典的なWeissman推定量にバイアス補正を考慮した形で与えられる．

これらの理論は，Irene Gomes, Laurence de Haanらの研究で与えられているので，KKS(2021)ではこの方法をUGH(Unbiased Gomes-de Haan)法と呼び，GARCHフィルタリングと組み合わせる方法を，GARCH-EVTに対比してGARCH-UGHと呼んだ．

4　VaR外挿バックテスト

ダウジョーンズ株価指数(1993年12月23日〜2009年11月9日)の損失率に対し，推定ウィンドウを1000(営業日にして概ね4年)として1期先の99.9% Value-at-Risk予測を繰り返す．推定が終わったらサイズ1000のウィンドウを1時点シフトし，モデルは再推定する．こうして3000日分の外挿予測を逐次的に行う．GARCHフィルタなしのUGH(緑)，GARCH-EVT(赤)，GARCH-UGH(青)が与える99.9% VaR外挿予測値のプロットが以下の図1である．

UGHはボラティリティの変動に全くついていけず，GARCHパートなしのUGHのみでは金融リスク管理には役立たないことが明瞭である．GARCH-EVTの予測値の少し右裾側に(図的には上側に)，GARCH-UGHの予測値が一様に来ていることがわかる．それが適切なリスク管理を与えることは，99.9% VaRの期待超過数に対して経験超過数がどうであったかを観察すれば良い．

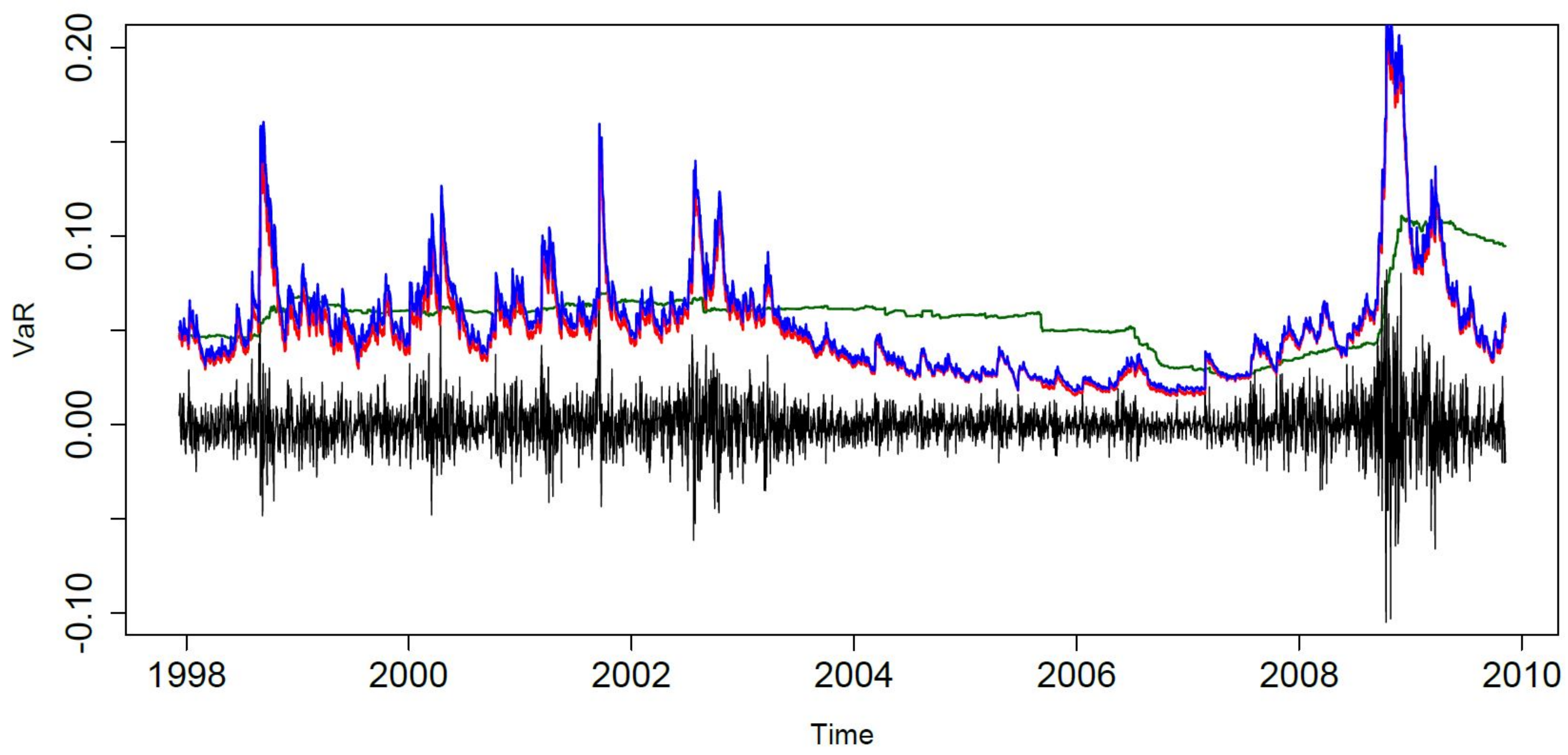

図 1: ダウジョーンズ指数損失率に対する99.9% VaR外挿予測

それが以下の表1にまとめられている．「上位%」というのは，順序統計量を大きい方から全体の何パーセント使うかを示している．紙幅の関係で5%，15%，25% の3つしか記載できないが，GARCH-UGHの経験超過数は期待超過数に一致している．この表はKKS(2021)のTable 6からの抜粋である．

上位%	5%	15%	25%
期待超過数	3	3	3
経験超過数 (UGH)	10 (0.001, 0.006)	9 (0.005, 0.020)	6 (0.128, 0.310)
経験超過数 (GARCH-UGH)	3 (1.000, 0.997)	3 (1.000, 0.997)	3 (1.000, 0.997)
経験超過数 (GARCH-EVT)	3 (1.000, 0.997)	4 (0.583, 0.885)	4 (0.583, 0.885)

表 1: ダウジョーンズ指数での99.9% VaR外挿バックテスト結果

経験超過の下に記載した2つ1組の数字は，左が経験超過比率が期待比率と合致しているかどうかの検定(Kupiec検定)のP値，右が超過にクラスター性がないこと，すなわち独立性の検定(Christoffersen検定)のP値である．UGHの予測はいずれも検定をパスしないが，GARCH-EVTとGARCH-UGHの結果は検定をパスしている．

参考文献

Kaibuchi, H., Kawasaki, Y. and Stupfler, G. (2021), GARCH-UGH: A bias-reduced approach for dynamic extreme Value-at-Risk estimation in financial time series, arXiv:2104.09879.