

## 公開講演会要旨

# 統計的モデル評価と因果解析

統計数理研究所 石 黒 真 木 夫

(1993 年 11 月 6 日, 統計数理研究所 講堂)

### 1. はじめに

情報量規準によるモデル評価という手段で、多次元データの成分間の因果関係を追求する方法を紹介する。データが独立なサンプルとして得られる場合の典型的な例として CATDAP モデルを利用する場合、時系列データが得られる場合の典型的な例として自己回帰モデルを利用する場合の 2 つのケースを扱う。

### 2. CATDAP モデルを使って

多次元独立データに基づく因果解析の例を示そう。まず因果関係を持つデータを作ってみよう。図 1 上部にフローチャートを示したプログラムで  $(I_1, I_2)$  という 2 次元のデータを生成すれば因果関係で結ばれたデータができるはずである。図の箱のなかの、たとえば、 $I_2 = \{1(0.2), 2(0.8)\}$  は  $I_2$  が 0.2 の確率で“1”という値をとり、0.8 の確率で“2”という値をとることを表す。この図の仕掛で、 $I_1$  の値に依存して  $I_2$  の出方が変わる。このような場合に、 $I_2$  の条件付確率は  $P_2(I_2|I_1)$  で与えられるといい、図 1 下部に描いたような  $I_1$  から  $I_2$  に向かう矢印で表現することにしよう。

$I_2$  が  $I_1$  と  $I_3$  に依存してきまるようなデータは、たとえば、図 2 の上部に示したフローチャートで記述されるプログラムで作られる。視覚的表現としては図 2 下部のパターン、条件付確率の式表現としては  $P_2(I_2|I_1, I_3)$  を使うことにする。 $P_2(I_2|I_1, I_3)$  の具体的な値は表の形にまとめることが出来る。図 2 のプログラムで作られるデータの条件付確率は表 1 で与えられる。

このプログラムを使って何組かのデータを発生して  $(I_1, I_2, I_3)$  の組合せが生起した回数を  $n(I_1, I_2, I_3)$  で表すことにする。 $n(I_1, I_2, I_3)$  の表を「分割表」という。表 2 に図 2 のプログラムで作った 200 組のデータの分割表を示す。

**例題 1. 表 2 のデータの解析** 分割表、表 2、が与えられたときに変数の間の因果関係に関してどれだけことが推論できるか考えてみよう。

$I_2$  の分布に関する 4 つのモデル  $P_2(I_2)$ ,  $P_2(I_2|I_1)$ ,  $P_2(I_2|I_3)$ ,  $P_2(I_2|I_1, I_3)$  を表 2 のデータにあてはめ、そのモデルの AIC を計算してみる。たとえば、 $P_2(I_2|I_3)$  を当てはめて推定される条件付確率は表 3 のようになり、AIC は

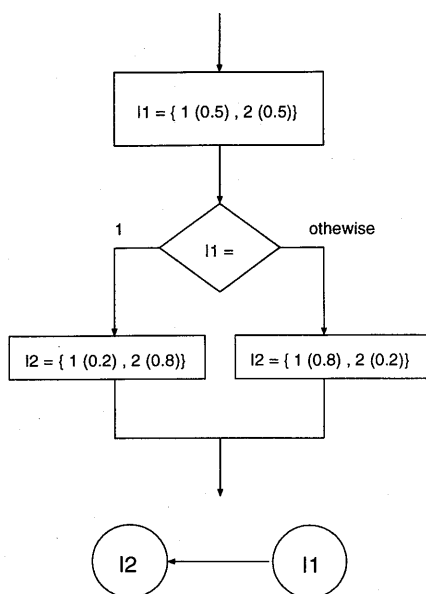
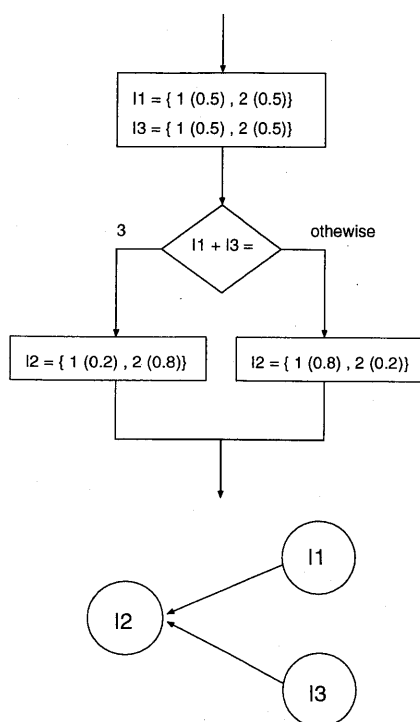
図1. 「 $I_1$  が原因で  $I_2$  が結果」の例.図2. 「 $I_1$  と  $I_3$  が  $I_2$  の原因」の例.

表1. 条件付確率.

$I_3$	$I_1$	$P_2(1   I_3, I_1)$	$P_2(2   I_3, I_1)$
1	1	0.8	0.2
1	2	0.2	0.8
2	1	0.2	0.8
2	2	0.8	0.2

表2. 分割表:  $n(I_1, I_2, I_3)$ .

$I_3$	$I_1$	$I_2$	
		1	2
1	1	43	5
1	2	12	39
2	1	8	41
2	2	41	11
.	.	104	96

$$\begin{aligned}
 AIC(I_2|I_3) = & -2 \left\{ \sum_{I_2} \sum_{I_3} (n(\cdot, I_2, I_3) \log n(\cdot, I_2, I_3) - 1) \right\} \\
 & + 2 \left\{ \sum_{I_1} (n(\cdot, \cdot, I_3) \log n(\cdot, \cdot, I_3) - 1) \right\} \\
 & + 2 \left\{ \sum_{I_2} (n(\cdot, I_2, \cdot) \log n(\cdot, I_2, \cdot) - 1) \right\}
 \end{aligned}$$

で計算される. この AIC は, “モデル  $P_2(I_2|I_3)$  の本来の AIC” - “モデル  $P_2(I_2)$  の本来の AIC” で定義した. この章の  $AIC(I_j|\cdots)$  はすべて同じように “モデル  $P_j(I_j|\cdots)$  の本来の AIC” - “モデル  $P_j(I_j)$  の本来の AIC” のかたちに「正規化」したものである. 表2の数値を入れて

$$AIC(I_2|I_3) = 1.01$$

を得る. 同様にモデル  $P_2(I_2 | I_1, I_3)$  を当てはめて得られる条件付確率の推定値は表4で, その

表3. モデル:  $P_2(I_2 | I_3)$ .

$I_3$	$\hat{P}_2(1   I_3)$	$\hat{P}_2(2   I_3)$
1	0.556	0.444
2	0.485	0.515

表4. モデル:  $P_2(I_2 | I_1, I_3)$ .

$I_3$	$I_1$	$\hat{P}_2(1   I_3, I_1)$	$\hat{P}_2(2   I_3, I_1)$
1	1	0.896	0.104
1	2	0.235	0.765
2	1	0.163	0.837
2	2	0.788	0.212

ときの AIC は

$$AIC(I_2 | I_1, I_3) = -85.93$$

で与えられる.

$I_2$  の分布に関する 4 つのモデルとその AIC を見やすいかたちにまとめたのが図 3 であり,  $I_1$  の分布に関する結果をまとめたのが図 4 である. 同じ様な図を  $I_3$  に関しても描くことができる.

さて, これらの条件付確率モデルの AIC が計算できると, ベクトル値確率変数  $(I_1, I_2, I_3)$  の同時確率に様々な構造をいれたモデルの AIC を計算することができる.

たとえば, モデル

$$P(I_3) \times P(I_1 | I_3) \times P(I_2 | I_1, I_3)$$

の AIC は,

$$\begin{aligned} & AIC(I_3) + AIC(I_1 | I_3) + AIC(I_2 | I_1, I_3) \\ &= 0.0 + 2.00 + (-85.93) = -83.93 \end{aligned}$$

で計算される. 図 5 に代表的ないくつかの構造とその AIC を示した. 中段が上記のモデルである. このような計算をすべての組合せについて行なって AIC の比較をすることができる. 表 2

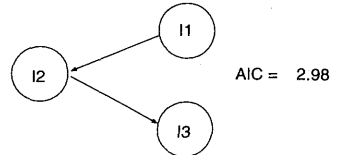
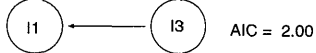
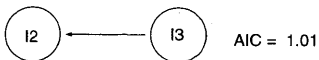
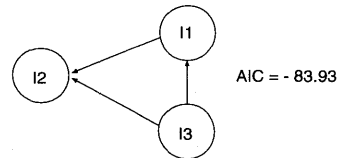
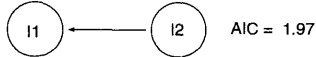
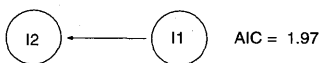
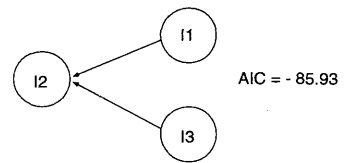
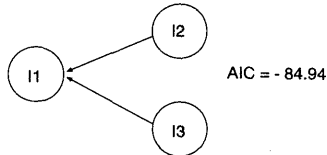
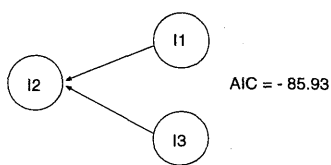


図3. 表2のデータの解析.

図4. 表2のデータの解析 (続き).

図5. 表2のデータの解析 (続き).

のデータの場合, モデル

$$P(I_3) \times P(I_1) \times P(I_2|I_1, I_3)$$

の AIC が最小になる. 運よく, 因果関係の真の構造が発見できたことになる.

**方法の限界.** 次に, 図 6 上段に描いた構造で作ったデータを解析した例を示す. 図の中, 下段と図 7 に代表的なモデルとその AIC を示す. 図 7 下段の構造は式で表すと  $P(I_2|I_1) \times P(I_1|I_3) \times P(I_3|I_2)$  となり, 同時分布として意味のある形にならず,  $AIC(I_2|I_1) + AIC(I_1|I_3) + AIC(I_3|I_2)$  の計算は無意味である. この「モデル」の AIC は無限大とする. 一般にここで採用している図示法で矢印をたどってもとに戻る構造を含んでいるモデルは無意味なのである.

さて, 図 6 と 7 を見るかぎり, 今回も正しい因果関係が見いだされたように見えるが, 残念ながら, 図 8 に示す 3 つの異なる構造が全く同じ AIC を与えることが, 原理的に明らかである.

この例が示すように一般に AIC の値によるモデル比較だけから因果関係に関して決定的なことをいうのは難しい. しかし, なにも分からないわけではなく, いくつかの有り得るパターンに絞り込むことが可能なことも明らかである. 他の情報, たとえばデータの観測時刻など, の知識を合わせることによって可能なパターンの範囲を狭められるはずである.

**例題 2. 実データ解析の例** 日本経済新聞社が行なった調査の解析をしてみよう. 消費行動に関する 2 回のアンケート調査によるデータの解析である. 調査結果から, 表 5 に示す 3 つの変数を解析の対象として CATDAP モデルを当てはめ, 表 6 の結果を得た. 表 6 の結果を組合せて, 図 9 に示すような AIC が得られた.

この結果は 3 変数  $I_1, I_2, I_3$  の間の  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3$  なる因果関係を支持するが, 図 8 の場合と同様に逆の因果関係を表現するモデル  $I_1 \leftarrow I_2 \leftarrow I_3$  とモデル  $I_1 \leftarrow I_2 \rightarrow I_3$  もまったく同じ評価を与えられ

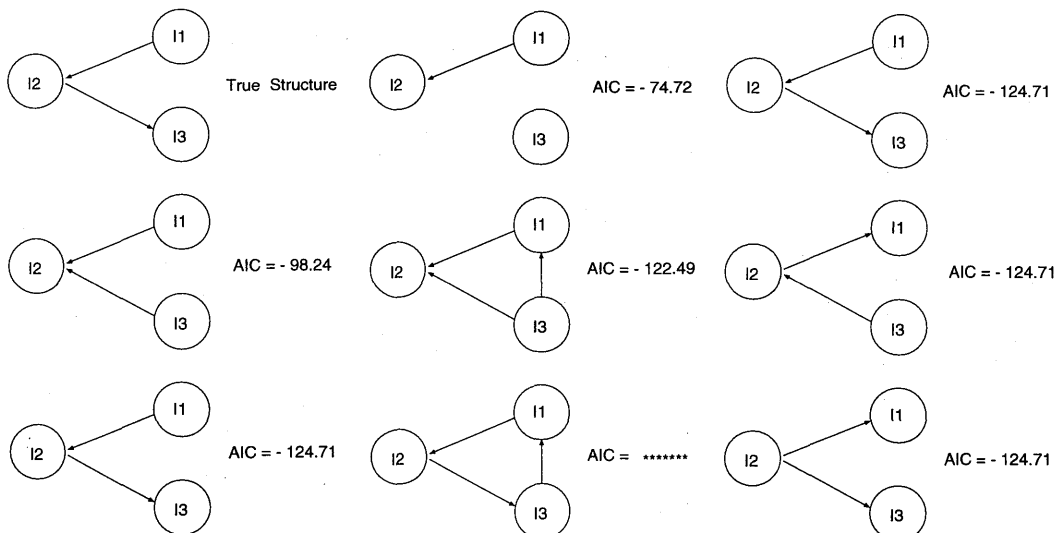


図 6. 「 $I_1$  が  $I_2$  の原因で  $I_2$  が  $I_3$  の原因」のデータの解析.

図 7. 「 $I_1$  が  $I_2$  の原因で  $I_2$  が  $I_3$  の原因」のデータの解析 (続き).

図 8. 「 $I_1$  が  $I_2$  の原因で  $I_2$  が  $I_3$  の原因」のデータの解析 (続き).

表 5. 日本経済新聞社が行なった調査.

変数	内容	カテゴリー数
$I_1$	服を買った / 買わない	2
$I_2$	服を買う事を計画している / 買うつもり / 予定なし	3
$I_3$	買いたいものの数	5

同じ人達への2回の調査による.  $I_1$  は  $I_2$  と  $I_3$  の半年後の調査.

表 6. CATDAP による解析結果.

モデル	パラメータ数	AIC
$P_1(\cdot   I_2)$	3	-50.97
$P_1(\cdot   I_3)$	5	-30.12
$P_1(\cdot   I_2, I_3)$	15	-38.89
$P_2(\cdot   I_1)$	4	-50.97
$P_2(\cdot   I_3)$	10	-350.57
$P_2(\cdot   I_1, I_3)$	20	-350.10
$P_3(\cdot   I_1)$	8	-30.12
$P_3(\cdot   I_2)$	12	-350.57
$P_3(\cdot   I_1, I_2)$	24	-330.02

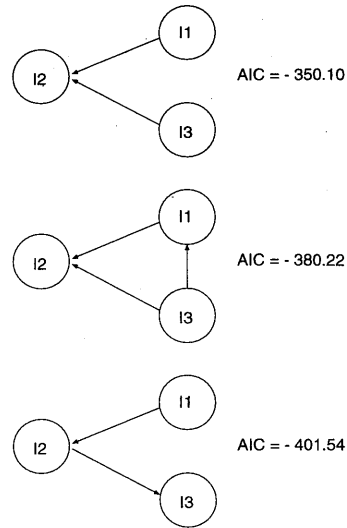


図 9. 日本経済新聞社が行なった調査のデータの解析.

る. 質問の内容と調査時期を考慮して,  $I_1 \leftarrow I_2 \rightarrow I_3$  なる因果関係を認めるのが妥当と考えられる.

### 3. 自己回帰モデルを使って

解析の対象が時系列データである場合には, 時間の前後関係が大きな情報を持っているために因果性に関してははるかにはっきりしたものいいが出来る.

たとえば, 図 10 に示したセメント・ロータリー・キルンの 7 カ所の測定点 (表 7) における記録 (図 11) を解析した例を見せよう.

このとき, キルンはオペレーターの制御のもとにあり, 第 1 変数から第 3 変数までが被制御変数, つまり被制御システムであるキルンの状態を表す変数, 残りの 4 変数がオペレーターによる制御入力の記録である.

ここでも様々な因果性を表現するモデルの AIC の比較で推論を進めることになるが, 基礎となるモデルとして多次元 AR モデル

$$\begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{kt} \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^M \begin{pmatrix} a_{11m} & a_{12m} & \cdots & a_{1km} \\ a_{21m} & a_{22m} & \cdots & a_{2km} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1m} & a_{k2m} & \cdots & a_{kkm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1(t-m)} \\ x_{2(t-m)} \\ \vdots \\ x_{k(t-m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{k1} & l_{k2} & \cdots & l_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{kt} \end{pmatrix}$$

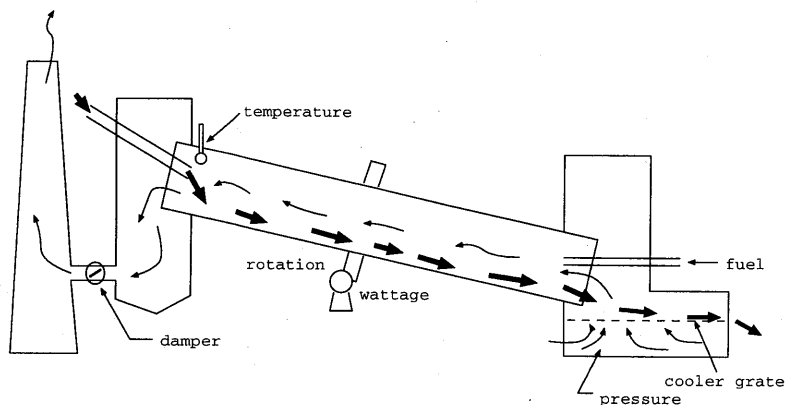


図 10. セメント・ロータリー・キルン.

表 7. セメント・ロータリー・キルンの測定.

変数番号	略称	内容
1	Wattage	キルン駆動所要動力
2	Pressure	クーラ下室圧力
3	Temperature	窯尻ガス温度
4	R	キルン回転速度
5	Fuel	燃料供給率
6	CR	クーラグレート速度
7	Damper	窯尻ダンパ開度

を用いる. このモデルをベクトルの成分ごとに分割すると

$$(3.1) \quad x_{jt} = \sum_{m=1}^{M_j} \sum_{i=1}^k a_{jim} x_{i(t-m)} + \sum_{i=1}^j l_{ji} e_{it} \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

となる.  $j$  ごとに次数  $M$  が異なる値をとれるように拡張してある.  $j$  ごとに最小 AIC 法を行なって  $M_j$  を決め,  $k$  個の AIC の和を全体の AIC として計算して

$$AIC=15078.4$$

を得た. モデル (3.1) に

$$a_{jim}=0 \quad (m=1, 2, \dots)$$

なる制約を加えることによって第  $i$  変数から第  $j$  変数への直接の影響がないことを表現するモデルになる.  $i \neq j$  なるすべての組合せに対してこのモデルの AIC を計算してまとめたのが表 8 である. この表を見て, AIC が 15080.0 より小さい場合をブランク, それより大きく 15090.0 より小さい場合を○, それ以上の場合を◎としたのが表 9 である.

このデータを最初に解析して, 歴史的な統計的制御の成功を報告した赤池・中川が, “ $P$  が上がってくると,  $W$  が下がりはじめるのです. これを放置しておくといけないことになりますから, クーラ回転数 ( $C_r$ ) を上げて懸命に  $P$  の上昇を打ち消すようにするのです.” というオペレーターの言葉を記録している (赤池・中川 (1972), p. 105) が,  $W$  と  $P$  が相互に強く結ばれていること,  $P$  に最も強く働きかける変数が  $C_r$  であることを示している表 9 に示された因

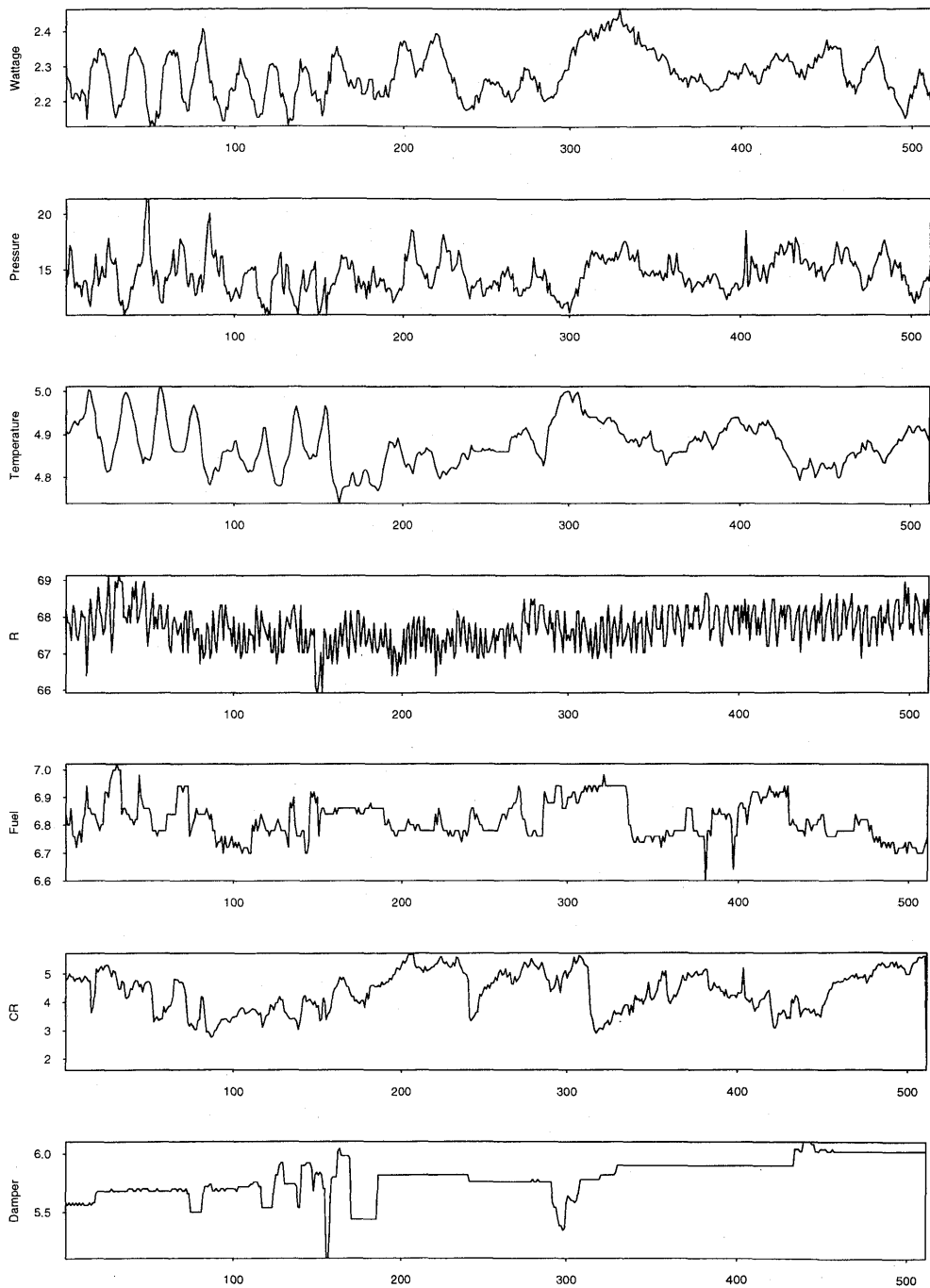


図 11. セメント・ロータリー・キルン・データ。

表8. 因果切断モデルの AIC.

Wattage	Pressure	Temp	Rotation	Fuel	Cooler	Damper
×	15205.2	15146.2	15089.8	15078.7	15088.5	15086.1
15362.3	×	15101.7	15074.5	15072.9	15103.9	15074.7
15096.7	16084.2	×	15079.0	15127.4	15083.6	15198.7
15079.4	15086.6	15110.1	×	15072.3	15075.6	15084.1
15147.1	15085.8	15198.9	15085.6	×	15075.1	15083.2
15077.1	15076.6	15091.1	15094.0	15147.1	×	15078.0
15203.8	15371.7	15165.1	15190.5	15389.0	15146.0	×

表9. セメント・ロータリー・キルンにおける因果関係.

Wattage	Pressure	Temp	Rotation	Fuel	Cooler	Damper
×	◎	◎	○		○	○
◎	×	◎			◎	
◎	◎	×		◎	○	◎
	○	◎	×			○
◎	○	◎	○	×		○
		◎	◎	◎	×	
◎	◎	◎	◎	◎	◎	×

果解析の結果とこのオペレーターの言葉はよい対応を示している。

**因果関係の役割.** 線形システムの各コンポーネントの間の因果関係の有無は上記のような形で推測できる。このようなシステムに関してはさらに、その因果関係がシステム全体の振舞いのなかでどういう役割を果たしているのか調べる方法がある。

多次元 AR モデル

$$x_t = \sum_{m=1}^M A(m)x_{t-m} + L\varepsilon_t$$

が推定できると、周波数応答関数

$$B(f) = \left[ I - \sum_{m=1}^M A(m)e^{-i2\pi fm} \right]^{-1} \quad (0 \leq f \leq 0.5)$$

と、クロスパワースペクトル,

$$P(f) = B(f)\Sigma B^*(f) \quad (0 \leq f \leq 0.5)$$

がただちに計算できる。ここで “\*” は共役転置を意味し、 $I$  は単位行列,

$$\Sigma = LL^T$$

である。

このモデルから推定される最初の3変数のパワースペクトルのグラフを図12に示す。2段目にこのパワースペクトルにおける制御入力からのノイズ寄与率を示す。特に直流成分に近い低周波成分において制御入力が出している雑音の影響が大きいことが明らかである。

3段目に、制御入力の雑音がなくなった場合を想定して計算されるスペクトルを示す。1段目のスペクトルに比べて背が低くなることが分かる。これは、制御系が出しているノイズを抑え



る事が出来れば、システム全体の揺らぎを小さく出来るであろうということを示唆している。では、ひょっとするとオペレーターによる「制御」は、有害無益と考えるべきなのだろうか？この点をチェックするには、制御入力から被制御システムへの信号の経路を切断してみれば良い。

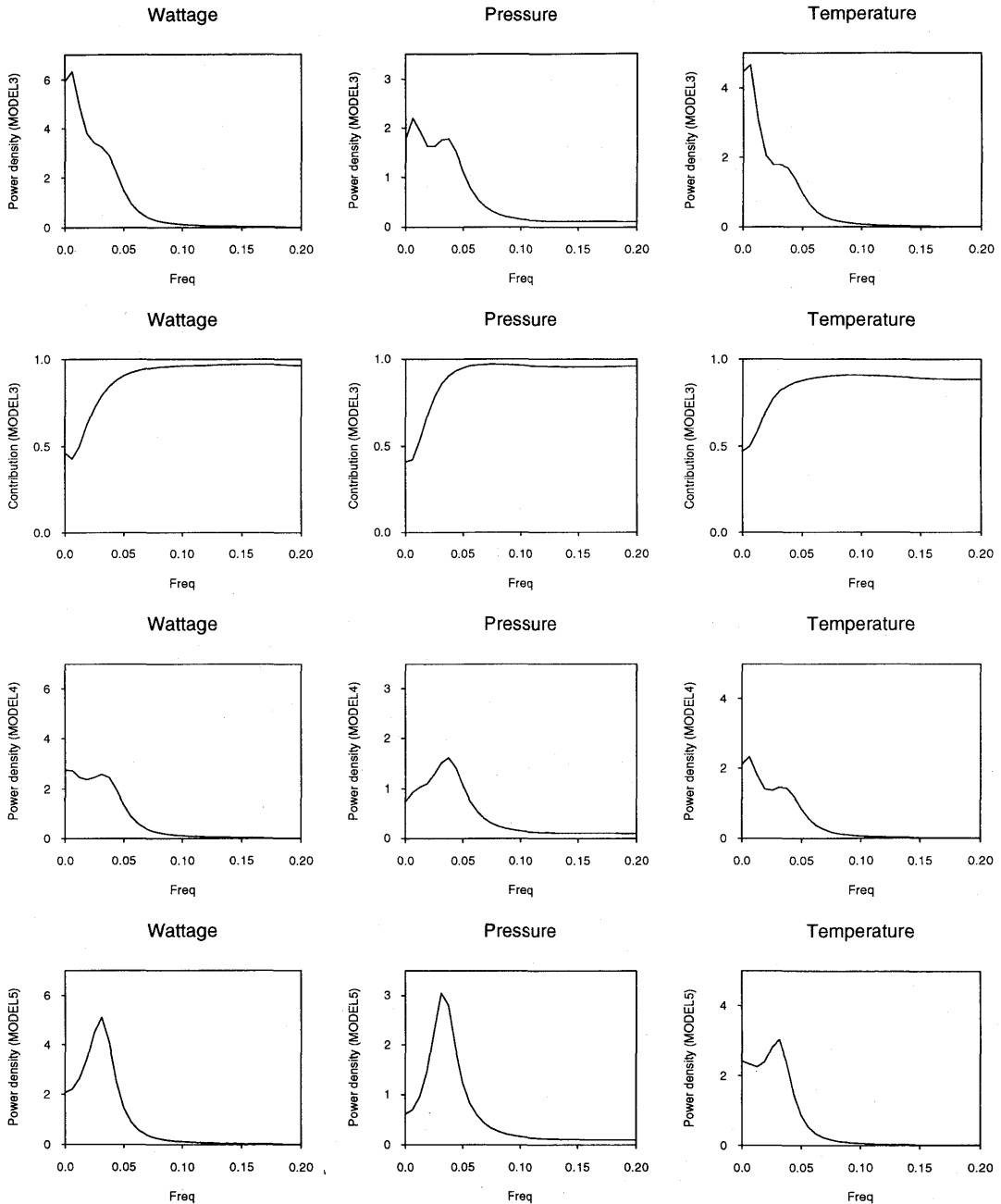


図 12. セメント・ロータリー・キルン・データのパワースペクトル。

切断すると因果解析で AIC の値が大きくなる, つまり情報量規準の観点から「有意に」0 ではない, AR の係数を 0 で置き換えることによってモデル上で信号経路を切断してみるのである。

このモデルにもとづくスペクトルの推定値を 4 段目に示す。3 段目に比べてスペクトルの背が高くなった。直流成分のごく近傍以外の周波数領域では, 1 段目のスペクトルより値が大きくなっている。

人間のオペレーターは中周波数域において有効な制御を行なっているが, 非常に低い周波数領域に於ける揺らぎを持ち込んでいるらしい。いふなれば, 近視眼的なシステム制御がオペレーターによってなされていたらしいことがデータから読みとれたことになる。納得できる結果ではないだろうか?

#### 4. 謝 辞

第 2 章, 日本経済新聞社のデータを解析した表 6 の結果は統計数理研究所の坂元慶行博士に頂いた。第 3 章の AIC の計算には統計数理研究所の「民間等との共同研究」で作られた NEAT システムが使われた。このシステムが動くようになったのは共同研究員であったアイザック社の町井昌徳氏の努力のたまものである。これに組み込まれている AIC 計算ルーチンを作ってくれたのは東京工業大学大学院の佐藤整尚君である。記して感謝の意を表する。

#### 参 考 文 献

- Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, *2nd International Symposium on Information Theory* (eds. B.N. Petrov and F. Csaki), 267-281, Akademiai Kiado, Budapest. (Reproduced in *Breakthroughs in Statistics*, Vol. 1 (eds. S. Kotz and N.L. Johnson), Springer, New York, 1992.)
- 赤池弘次, 中川東一郎 (1972). 『ダイナミックシステムの統計的解析と制御』, サイエンス社, 東京.
- 石黒真木夫 (1989). 多次元 AR モデルによるシステム解析, オペレーションズ・リサーチ, **34**(10), 547-554.
- Ishiguro, M. (1994). System analysis and seasonal adjustment through model fitting, *Proceedings of the First US/Japan Conference on the Frontiers of Statistical Modeling: An Informational Approach*, 79-91, Kluwer, Netherlands.
- 坂元慶行 (1985). 『カテゴリカルデータのモデル分析』, 共立出版, 東京.
- 坂元慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎 (1985). 『情報量統計学』, 共立出版, 東京.
- 八木原彬殷 (1976). セメントプロセスの制御, 数理科学, **153**, 53-59.